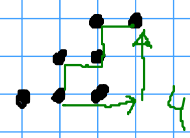
Die optimale "Stadt"

Manhattanabstand

$(L_1$-Norm$)$

$n = 7$

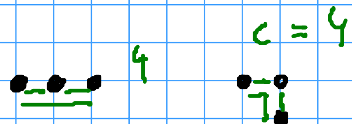


$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

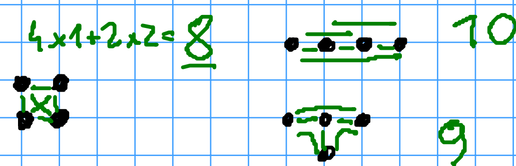
Finde n Gitterpunkte $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$c(\{p_1, p_2, \dots, p_n\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \|p_i - p_j\|_1 \rightarrow \text{MIN}$$

$n = 3$



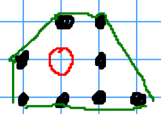
$n = 4$

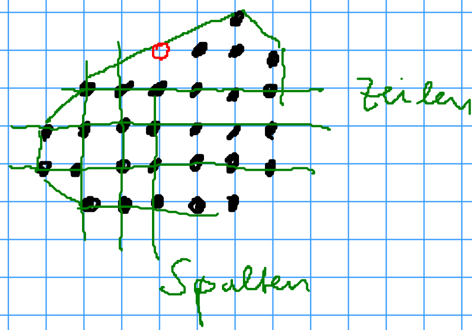


$$c = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j |x_i - x_j| + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j |y_i - y_j|$$

$S = \{p_1, \dots, p_n\}$

<u>Lemma:</u> (Konvexität): Alle Gitterpunkte in der konvexen Hülle von S gehören zu S.

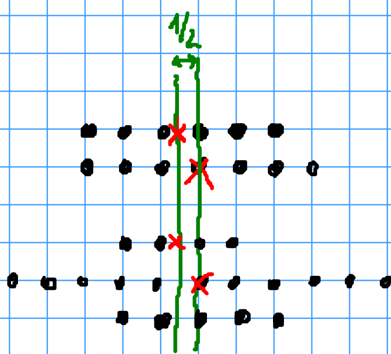




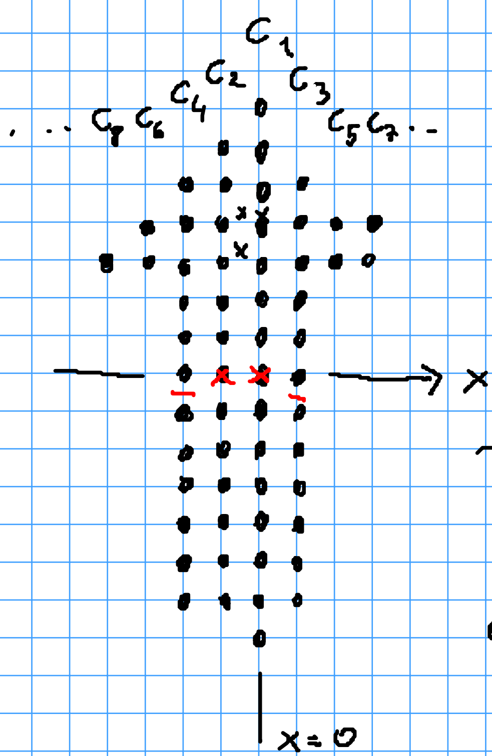
Lemma (Symmetrie):

a) Alle Zeilen ungerader Länge sind auf derselben vertikalen o.B.d.A. y-Achse zentriert.

b) Alle Zeilen gerader Länge sind auf derselben vertikalen o.B.d.A. $(x = -\frac{1}{2})$ Achse zentriert, um $\frac{1}{2}$ von der Achse für (a) verschoben



Das gleiche gilt für die Spalten.



Die längste Spalte c_1 ist auf der y-Achse

Die zweit längste c_2 $x = -1$

drittlängste c_3 $x = +1$

... c_4 $x = -2$

.....

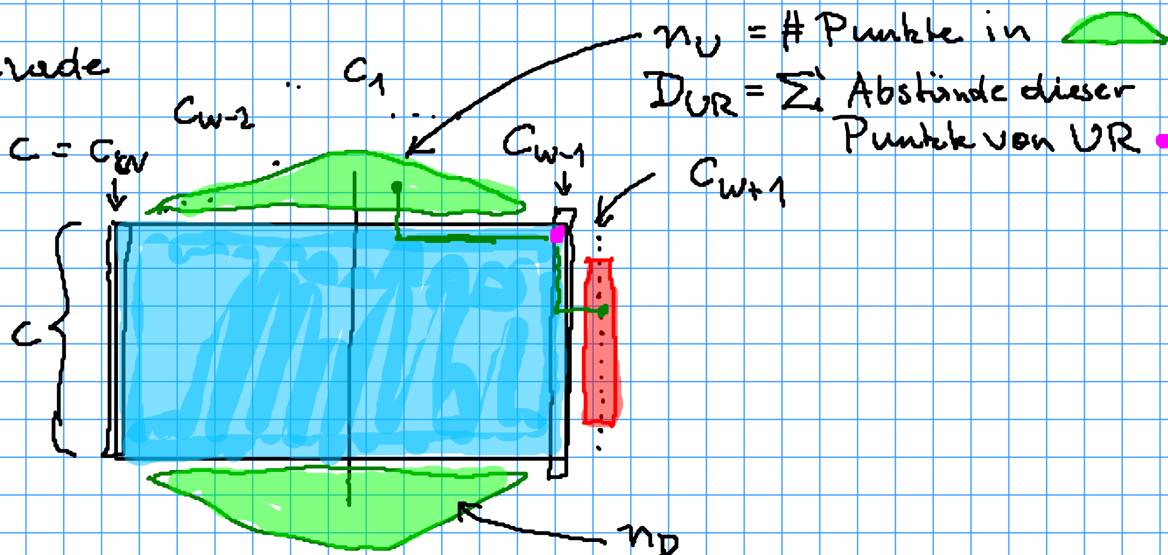
Die Stadt ist durch die sortierte Folge $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots \geq c_k > c_{k+1} = 0$ der Spaltenlängen festgelegt.

---

1 $T[\underline{w}, \underline{c}]$ = Kosten der optimalen Stadt mit $\underline{w}$ Spalten

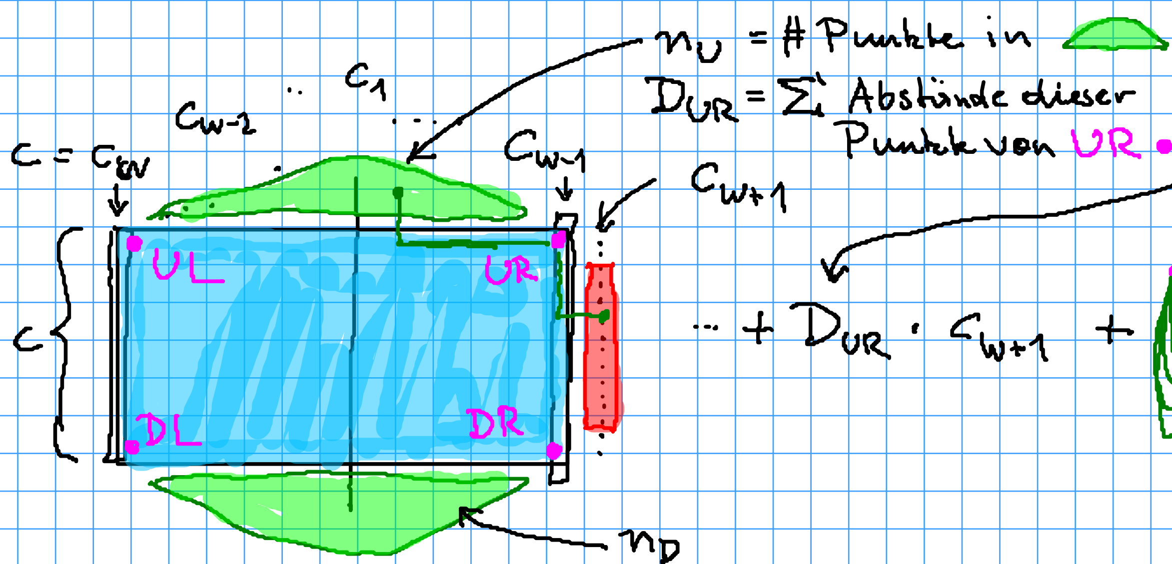
$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_w = \underline{c}$

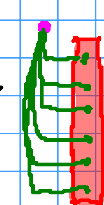
Fall 1: w gerade



Wenn Spalte c_{w+1} angefügt wird, müssen wir genügend Informationen haben um die Gesamtkosten auszurechnen:

Summe der Abstände von der neuen Spalte zu den alten Punkten.



$\dots + D_{UR} \cdot c_{w+1} +$  $\cdot n_U$

1. $T[w, c; n_U, n_D; D_{UR}, D_{UL}, D_{DR}, D_{DL}] =$

Kosten der optimalen Stadt mit ...

2. $T[w, c; n_U, n_D; D_{UR}, D_{UL}, D_{DR}, D_{DL}] :=$

$\min \left\{ \ldots \right.$ Welche kleineren Teilprobleme tragen zur Lösung von $T[w, c; \ldots]$ bei?

<u>Vorwärtsmodus:</u>

Zu welchen größeren Problemen $T[w', c' ..]$ trägt ein bestimmtes Problem $T[w, c, \ldots]$ bei?

Bearbeite $T[w, c, \ldots]$

Erzeuge alle „Nachfolgerprobleme" $(w', c', \ldots)$:

$T[w', c', \ldots] := \min(T[w', c' \ldots]$, neue Lösung als Erweiterung von $T[w, c])$

auf ∞ initialisiert

Lemma: $w, c_1 \leq 2\sqrt{n} + 5$ ... $O(n^{7.5})$ Laufzeit

$O(n^7)$ Speicher