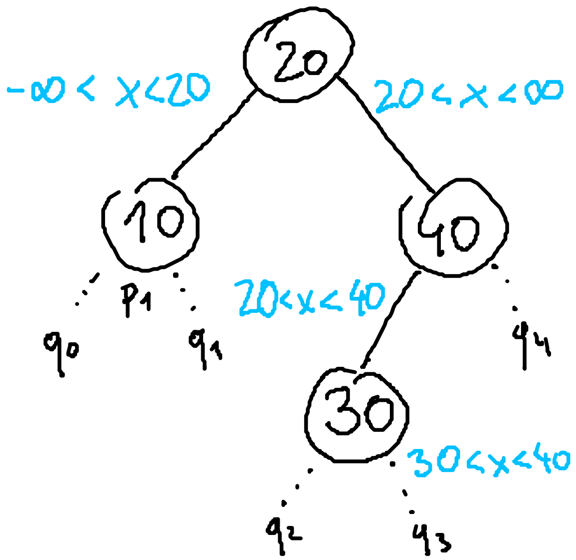
Optimale Suchbäume



n Schlüssel x_i : $x_1=10$, $x_2=20$, $x_3=30$, $x_4=40$

Häufigkeiten	$p_1=5$	$p_2=2$	$p_3=3$	$p_4=1$	
Tiefe + 1 = l_i+1	2	1	3	2	
	10 +	2 +	9 +	2 = 23	
Lücken	$x<10$	$10<x<20$	$20<x<30$	$30<x<40$	$x>40$
Häufigkeiten	$q_0=22$	$q_1=11$	$q_2=0$	$q_3=3$	$q_4=4$
Tiefe	2	2	3	3	2
	44 +	22 +	0 +	9	+ 8 = 83

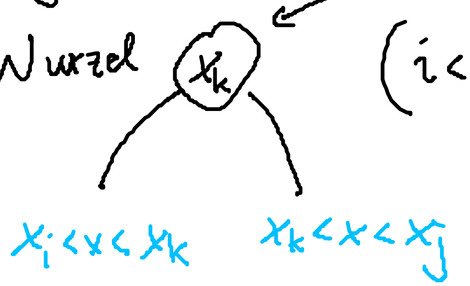
Gesamtsuchzeit $23+83=106 \longrightarrow$ MIN.

---

1. Teilproblome T_{ij} : optimaler Suchbaum für alle Suchschlüssel x im Intervall $x_i < x < x_j$

$$\boxed{x_0 = -\infty < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = \infty} \qquad (0 \le i < j \le n+1)$$

S_{ij} ... Suchzeit für den optimalen Suchbaum für T_{ij}

Wurzel


$(i<k<j)$

$\min\{ S_{ik} + S_{kj} \mid i<k<j \}$

+ Vergleich mit der Wurzel
$= 1 \times (q_i + p_{i+1} + q_{i+1} + p_{i+2} + \ldots + p_{j-1} + q_{j-1})$

REKURSION

2. $S_{ij} = (q_i + p_{i+1} + \ldots + q_{j-1}) + \min\{ S_{ik} + S_{kj} \mid i<k<j \} \quad (j \ge i+2)$

2b. $S_{i,i+1} = 0 \quad (0 \le i \le n)$ (ANFANGSWERTE)

$S_{0,n+1}$ = Lösung des Gesamtproblems

ACHTUNG: Formulieren Sie diese Lösung NICHT als rekursive Funktion!

Es würde das gleiche Teilproblem S_{ij} mehrfach gelöst werden!

Lösung: Jedes Teilproblem T_{ij} nur einmal lösen und S_{ij} speichern.

Systematisches Lösen von Teilproblemen mit Rückgriff auf kleinere Teilprobleme

ein allgemeines Algorithmenentwurfsprinzip

1. Definition der Teilprobleme

2. Rekursion

2b. Anfangsbedingungen

3. Überlegen einer systematischen Reihenfolge (von kleineren Problemen zu größeren)

T_{ij} $0 \le i < j \le n+1$, nach Länge $j-i$ der Intervalle

Laufzeit: $O(n^2)$ Teilprobleme

$j-i-1 = O(n)$ Möglichkeiten für k

„$q_i + p_{i+1} + \ldots$" $O(j-i) = O(n)$ (*) $\rightarrow O(1)$

$\Big\}\ O(n)$

$O(n^3)$ gesamt [→ $O(n^2)$ siehe Übungen]

Speicher: $O(n^2)$

* Vorverarbeitung: $O(n)$ $\begin{cases} Q_0 = 0 \\ Q_1 = q_0 \\ Q_2 = q_0 + p_1 \\ Q_3 = q_0 + p_1 + q_1 \\ Q_4 = q_0 + p_1 + q_1 + p_2 \\ Q_5 = q_0 + p_1 + q_1 + p_2 + q_2 \\ \vdots \\ Q_{2i} = q_0 + p_1 + \dots\dots + p_i \end{cases}$

Zurückverfolgen der Lösung ($S_{0,n+1}$ ist nur der optimale Wert)

a) Speichere zu jedem Teilproblem den besten Wert von k
(vgl. Vorgängerzeiger bei kürzesten Wegen)

b) Rekonstruiere das optimale k bei Bedarf im Nachhinein