

## Längste aufsteigende Teilfolge

7, 12, 14, 1, 9, 6, 22, 11, 15, 13

Gegeben  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

Gesucht  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n$

$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \leq \dots \leq a_{i_k}$   $k \rightarrow \text{MAX.}$

Dynamische Programmierung:

$T_j :=$  längste aufst. Teilfolge in  $(a_1, \dots, a_j)$

7, 12, 14, 1, 9, 6, 22, 11, 15, 13  
 $T_1=1$   $T_3=3$   $T_4=3$   $T_5=3$   $T_6=3$   $T_7=4$   $T_8$   
 $T_2=2$

2. Versuch

$T_j :=$  längste aufst. Teilfolge in  $(a_1, \dots, a_j)$ , die mit  $a_j$  aufhört.

7, 12, 14, 1, 9, 6, 22, 11, 15, 13

$T_1=1$   $T_2=2$   $T_3=3$   $T_4=1$   $T_5=2$   $T_6=2$   $T_7=4$   $T_8=3$   $T_9=4$   $T_{10}=4$

$T_j := 1 + \max(\{T_i \mid i < j; a_i \leq a_j\} \cup \{0\})$

Lösung des Gesamtproblems:  $\max\{T_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$n$  Teilprobleme  $T_1, \dots, T_n$  zu je  $O(n)$  Zeit  
Zeit  $O(n^2)$ , Speicher  $O(n)$ .

---

$$\max\{T_i \mid i \neq j; a_i \leq \overset{S}{x_j}\}$$

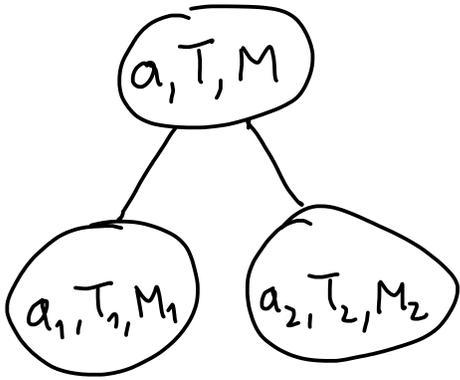
$a_i$ : Schlüssel       $T_i$ : Werte

Gesucht ist der größte Wert unter allen Schlüsseln  $\leq S$

Bereichsabfrage:

- größter Wert
  - Summe der Werte
  - Anzahl der Elemente
- } in einem Bereich:  $\in [\infty, S]$   
Schlüssel  $\in [a, b]$

erweiterter Suchbaum:



Jeder Knoten speichert das Maximum  $M$  der Werte im Teilbaum

$$M = \max \{ M_1, M_2, T \}$$

Abfrage (Knoten  $x, S$ ):

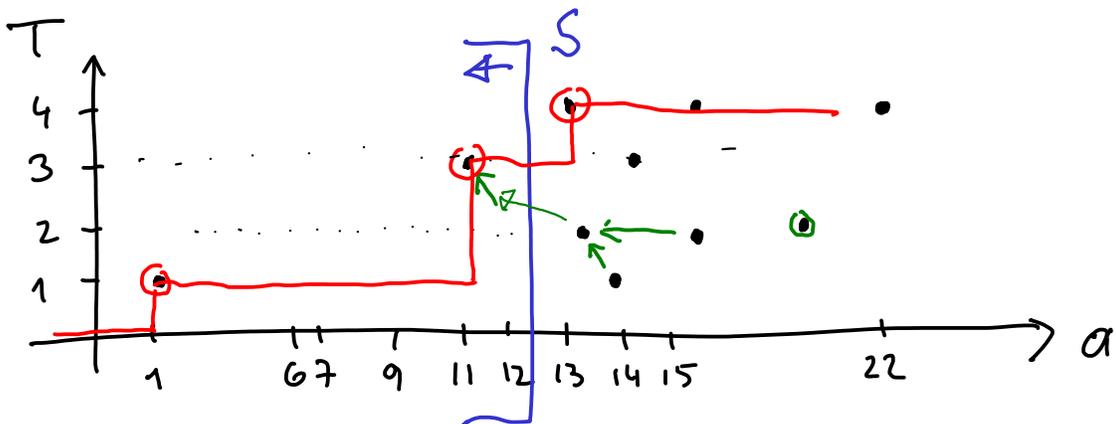
$O(\log n)$

- if  $x$  is None : return  $-\infty$
- if  $S < x.a$  : return Abfrage( $x.links, S$ )
- if  $S = x.a$  : return  $\max(x.links.M, x.T)$
- if  $S > x.a$  : return  $\max(x.links.M, x.T, \text{Abfrage}(x.rechts, S))$

Gesamtlauflzeit :  $O(n \log n)$

$$f(S) = \max \{ T_i \mid a_i \leq S \}$$

7, 12, 14, 1, 9, 6, 22, 11, 15, 13 ...  
 $T_1=1$   $T_2=2$   $T_3=3$   $T_4=1$   $T_5=2$   $T_6=2$   $T_7=4$   $T_8=3$   $T_9=4$   $T_{10}=4$



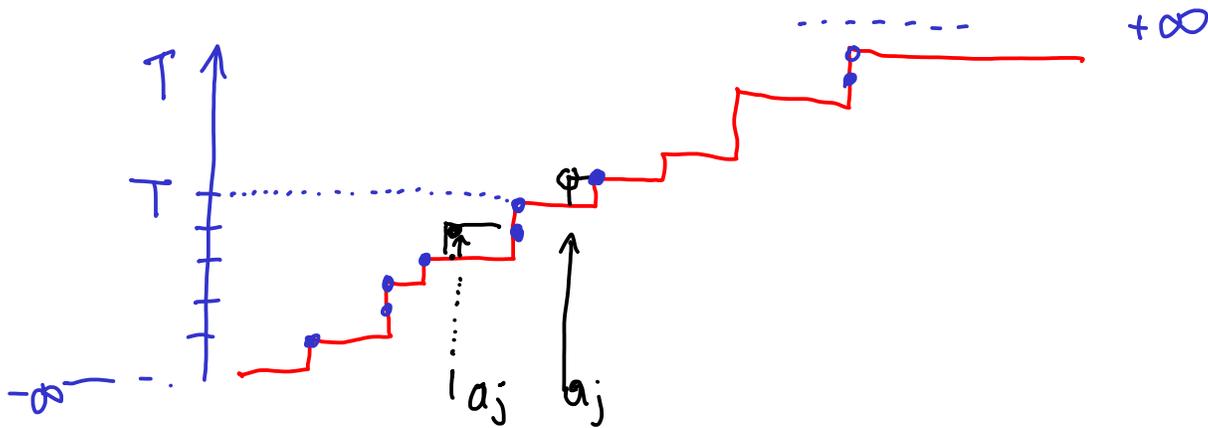
$(a_i, T_i)$  dominiert  $(a_j, T_j) \Leftrightarrow a_i < a_j$  und  $T_i \geq T_j$

Dominierte Punkte kann man weglassen.

$$f(S) = \max \{ T_i \mid a_i \leq S \}$$

for  $i=1, 2, \dots, n$ :

$$\left[ \begin{array}{l} T_j := 1 + f(a_j) \\ \text{"} T_j \text{ einfügen" und } f \text{ ausbessern} \end{array} \right.$$



Darstellung von  $f$ :  $A_T := \min \{ S \mid f(S) \geq T \}$

$$A_0 = -\infty \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq A_{n+1} = \infty \dots \text{ Feld}$$

Auswertung von  $f(a_j)$ : finde  $T_j = T$  mit  $A_T \leq a_j < A_{T+1}$

Ausbessern von  $f$  :  $A_{T+1} := a_j$

↑  
binäre Suche!  
 $O(\log n)$