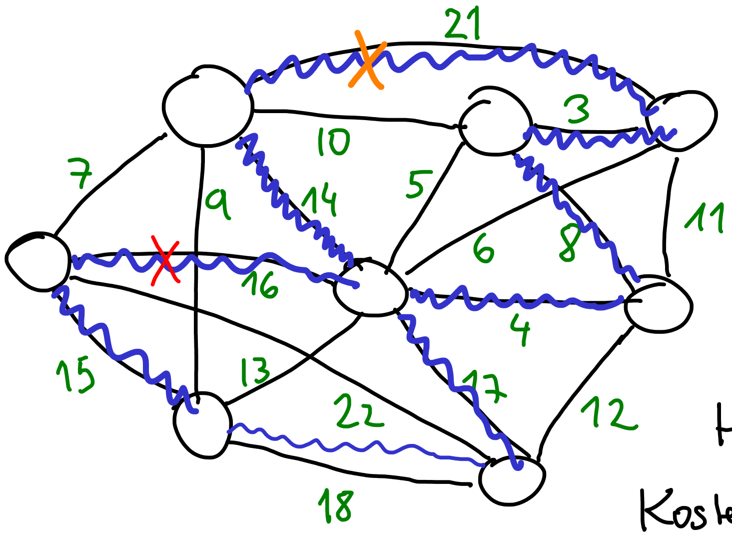
Kürzeste Spannbäume



Gegeben:
ungerichteter Graph G
mit Kantengewichten c_{uv}

Gesucht:
Kürzestes Verbindungsnetzwerk
= Teilmenge der Kanten

Hauptziel: zusammenhängend

Kosten = Summe der Kantenkosten → MIN

- Das kürzeste Netzwerk ist kreisfrei. (Annahme: $c_{uv} > 0$)

Ein kreisfreier zusammenhängender Graph ist ein Baum.

Ein kreisfreier zusammenhängender Teilgraph, der alle Knoten des Graphen G enthält, ist ein Spannbaum.

- Annahme: Eingabegraph G zusammenhängend.
  - Kapazität der Kanten ist kein Thema.
  - Ausfallssicherheit ist kein Thema.

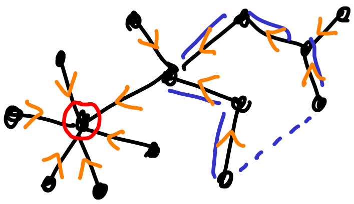
  } Zusammenhang reicht.

- Annahme: Alle Kosten c_{uv} sind verschieden.
  (der Bequemlichkeit halber)

Bäume in der Graphentheorie und Bäume als Datenstrukturen

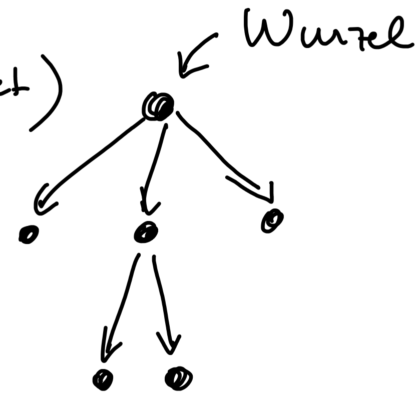
(ungerichtet)

- zusammenhängend
- kreisfrei
- n Knoten und $m = n-1$ Kanten



- Zwischen je zwei Knoten gibt es genau einen Weg.
- Bei Hinzunahme einer Kante entsteht ein eindeutiger Kreis.
- Grad
  = Anzahl der inzidenten Kanten
  = Anzahl der Nachbarn

(gerichtet)



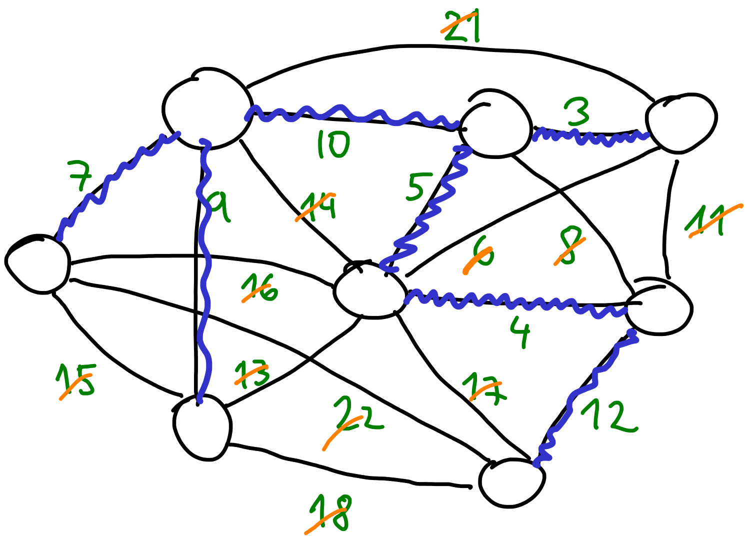
- Wurzel: ausgezeichneter Knoten
- Kinder sind typischerweise unterschieden: linkes Kind, rechtes Kind
- Grad: Anzahl der Kinder

GERICHTETE BÄUME

- Wähle einen beliebigen Knoten als Wurzel und orientiere alle Kanten
  a) zur Wurzel hin.
  b) von der Wurzel weg.

Beispiele:
Tiefensuchbaum, kürzeste-Wege-Baum

Der gierige Algorithmus (Algorithmus von Kruskal)



$T := \emptyset$

Betrachte die Kanten $e_1, e_2, \dots$ $\dots e_m$ in der Reihenfolge nach Gewicht sortiert:

for $j = 1, 2, \dots, m$:

  if $T \cup \{e_j\}$ enthält keinen Kreis:

    $T := T \cup \{e_j\}$

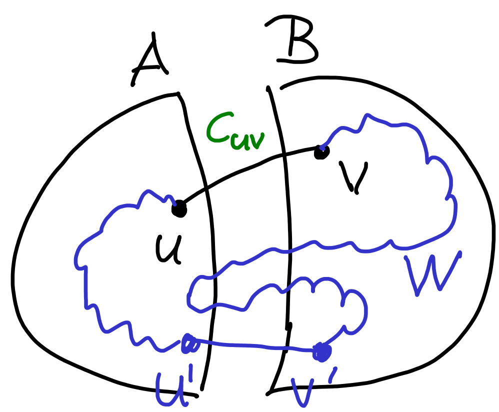
vorzeitiger Abbruch sobald $|T| = n-1$

return T;

Lemma: $A \subseteq V(G)$, $B = V(G) \setminus A$

uv sei die* Kante mit $u \in A$, $v \in B$ mit den kleinsten Kosten c_{uv}.

Dann gehört uv zum kürzesten Spannbaum T^*.



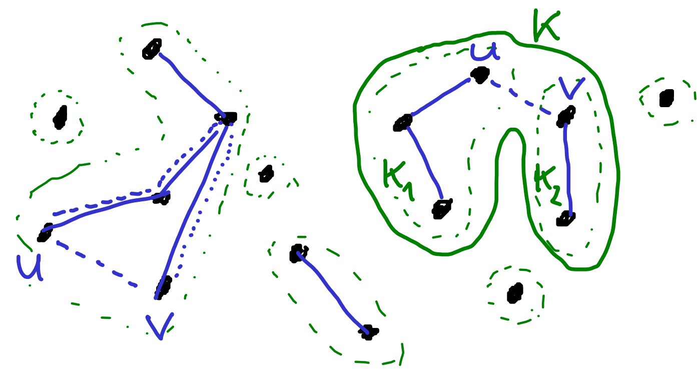
* weil alle Kosten verschieden sind.

Beweis durch Widerspruch: Annahme $uv \notin T^*$

Betrachte den Weg W von u nach v in T^*, und eine Kante $u'v' \in W$ mit $u' \in A$, $v' \in B$

$T^* + uv - u'v'$ ist ebenfalls zusammenhängend $\Rightarrow$ ein Spannbaum mit kleineren Kosten ($c_{uv} < c_{u'v'}$). Widerspruch. $\square$

Zusammenhangskomponenten



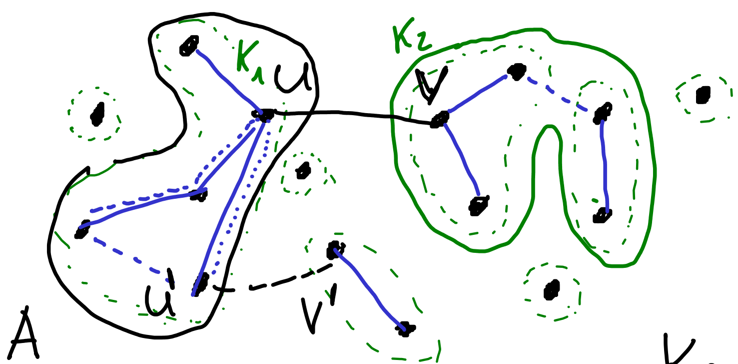
- Die Kanten von T bilden zu jedem Zeitpunkt eine Zerlegung der Knotenmenge in <u>Zusammenhangskomponenten</u>.

$T + uv$ ist kreisfrei $\Leftrightarrow$ u und v liegen in verschiedenen Komponenten K_1 und K_2

$\Rightarrow$ Beim Hinzufügen von uv werden K_1 und K_2 vereinigt:

$$K = K_1 \cup K_2$$

- Zu Beginn startet man mit n Einzelkomponenten.
- Am Ende gibt es eine einzige Komponente.



$T := T + uv$

$u \in K_1 \quad v \in K_2$

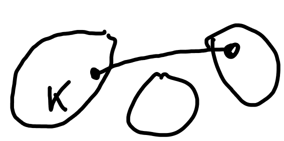
$A := K_1, \; B := V(G) \setminus A_1$

Kann es eine kürzere Kante $u'v'$ zwischen A und B geben?

Dann wäre $u'v'$ schon früher in T aufgenommen worden. Widerspruch.

Lemma $\Rightarrow$ $uv \in T^*$

T ist am Ende ein Baum $\Rightarrow$ $T = T^*$



$\square$

Kanten mit gleichen Kosten

$$c(e_1) \le c(e_2) \le c(e_3) \le \ldots\ldots \le c(e_m)$$

$+\varepsilon$ $\quad +2\varepsilon$ $\quad +3\varepsilon$ $\quad \ldots$ $\quad +m\varepsilon$

(Bei Gleichheit ordne beliebig.)

Ersetze $c(e_i)$ durch $\bar{c}(e_i) = c(e_i) + i\varepsilon$ $\quad (\varepsilon > 0)$ (IN GEDANKEN)

$\bar{c}$ sind alle verschieden. Reihenfolge ist die gleiche.

T ist optimal bezüglich $\bar{c}$, für alle $\varepsilon > 0$.

$$c(T') \le \bar{c}(T') \le c(T') + mn\varepsilon \quad \text{für jeden Spannbaum } T'$$

Behauptung: T ist optimal bezüglich c.

Annahme: $\quad c(T') < c(T) \qquad \varepsilon := \dfrac{c(T) - c(T')}{2mn}$

$$\bar{c}(T') \le c(T') + mn\varepsilon \cancel{=} < c(T') + \frac{c(T) - c(T')}{\cancel{2}} = c(T) \le \bar{c}(T)$$

$$\Rightarrow \bar{c}(T') < \bar{c}(T). \quad \text{Widerspruch.}$$

SATZ. Der Algorithmus von Kruskal bestimmt einen kürzesten Spannbaum.