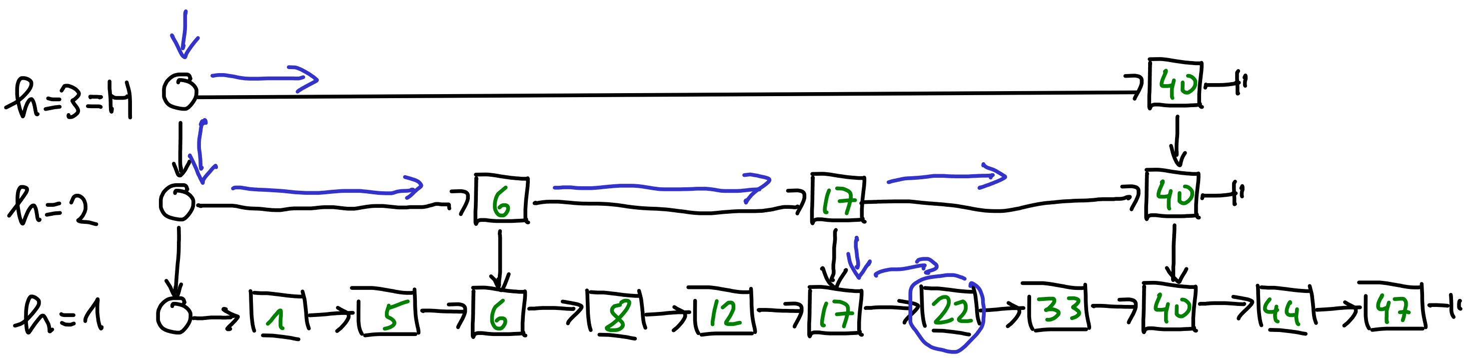
Skiplisten



Wahrscheinlichkeitsparameter $p = \frac{1}{2}$

Jedes Element auf Höhe h wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p auf Höhe $h+1$ kopiert.

Ein neu eingefügtes Element hat

- mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ Höhe 1,
- mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ Höhe 2,
- mit Wahrscheinlichkeit $1/8$ Höhe 3,

$1/16$ … 4,

⋮ ⋮

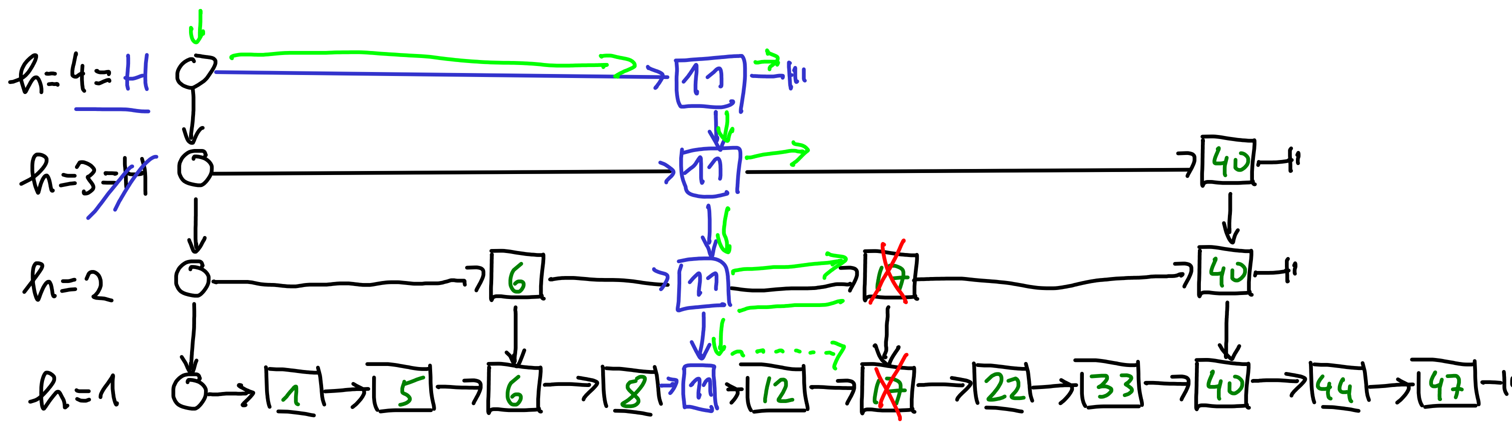
$1/2^h$ h.

⋮ ⋮

h hat eine geometrische Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1-p = \frac{1}{2}$. $E[h] = 2$.

Einfügen: h bestimmen und auf jeder Ebene $h, h-1, h-2, \ldots, 1$ in die Liste einfügen.

neues Element $\boxed{11}$ mit Höhe $h = 4$



Laufzeit für das EINFÜGEN:

- Änderungen: Einfügen in eine verkettete Liste: $O(h)$
- Finden der Einfügestellen: gleicher Aufwand wie Suchen nach $\boxed{11}$.

SPÄTER: $O(\log n)$ Zeit.

Laufzeit für das LÖSCHEN:

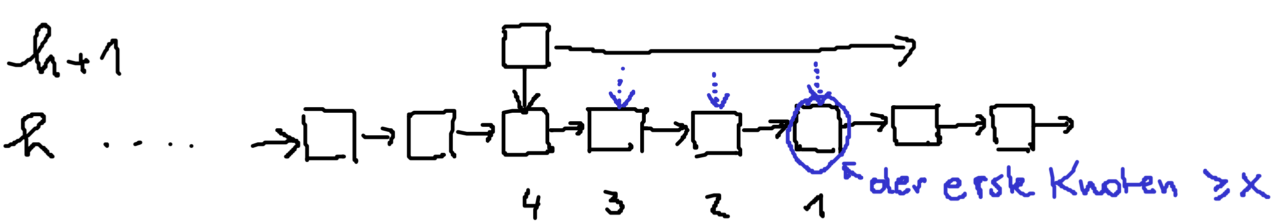
- Änderungen: Löschen aus verketteten Listen: $O(H)$
- Finden der Löschstellen: gleicher Aufwand wie Suchen nach $\boxed{17}$ in der Liste nach dem Löschen.

Analyse der Suchzeit

Starte bei einem beliebigen Knoten auf beliebiger Höhe h in der Skipliste.

Gehe nach links bis zu einem Knoten, der auch auf Höhe $h+1$ existiert (oder bis der Anfang der Liste erreicht ist.)

Die erwartete Anzahl an besuchten Knoten ist ≤ 2.



$\boxed{\text{Die \underline{erwartete} Anzahl von Vergleichen auf jeder Höhe } h \text{ ist } \leq 1.}$

Die erwartete Laufzeit für Suchen, Einfügen und Löschen ist $O(H) = O(\log n)$.

Die erwartete Höhe H einer Skipliste mit n Schlüsseln ist $O(\log n)$. $\leq \log_2 n + 3$

BEWEIS:

(1.) $E[H] = Pr[H>0] + Pr[H>1] + \dots$

(gilt für jede Zufallsvariable $\in \{0,1,2,\dots\}$)

(2.) $Pr[H>k] \leq \frac{n}{2^k}$ (Aufgabe 46 b)

$k_0 = \lfloor \log_2 n \rfloor$

$$E[H] = \underbrace{\underbrace{Pr[H>0]}_{\leq 1} + \underbrace{Pr[H>1]}_{\leq 1} + \dots + \underbrace{P[H>k_0]}_{\leq 1}}_{\leq k_0+1}$$

$$+ \underbrace{Pr[H>k_0+1]}_{\leq \underbrace{\frac{n}{2^{k_0+1}}}_{\leq 1}} + \underbrace{Pr[H>k_0+2]}_{\leq \underbrace{\frac{n}{2^{k_0+2}}}_{\leq 1/2}} + \dots$$

$2^{k_0+1} \geq n$

$\leq 1 \quad \leq 1/2 \quad \leq 1/4 \dots$ $\quad \underbrace{\qquad}_{\leq 2}$

$\leq k_0 + 3 \leq \log_2 n + 3$ $\square$

Beweis von (1): $E[H] = Pr[H>0] + Pr[H>1] + \cdots\cdot$

$$E[H] = \sum_{i=0}^{\infty} i\, Pr[H=i]$$

$$\begin{aligned}
&= Pr[H=1] \\
&\quad + Pr[H=2] + Pr[H=2] \\
&\quad + Pr[H=3] + Pr[H=3] + Pr[H=3] \\
&\quad + Pr[H=4] + Pr[H=4] + Pr[H=4] + Pr[H=4] \\
&\quad \vdots \\
&= Pr[H>0] + Pr[H>1] + Pr[H>2] + \cdots \qquad \square
\end{aligned}$$