Erfüllbarkeit (Satisfiability, SAT)

Eingabe: Eine Boolesche Formel $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ in n Variablen in konjunktiven Normalform.

Frage: Gibt es eine Belegung der Variablen, die Φ wahr macht?

oder $\neg x_3$ (Negation)

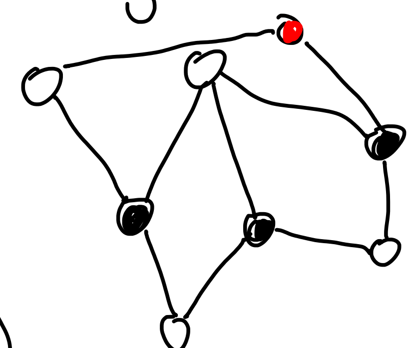
$$(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_7 \vee x_9) \wedge (\dots$$

GRAPHENFÄRBUNG:

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: Eine Färbung der Knoten mit möglichst wenigen Farben.

$$f: V \to \{1, 2, \dots, k\} \quad \forall uv \in E: f(u) \neq f(v)$$



GRAPHENFÄRBUNG: (Entscheidungversion)

Eingabe:
- Ein ungerichteter Graph G
- Eine Zahl k.

Frage: Ist G mit k Farben färbbar?

GRAPHENFÄRBUNG (Entscheidungversion) $<_p$ SAT

Eingabe: $G = (V, E), k$

Variable x_{vi}: Knoten v bekommt Farbe i.

$(v \in V, \; i = 1, \dots, k)$ $\quad nk$ Variablen gültige Färbung: $\forall uv \in E\ \forall i=1,..,k$: $\underbrace{(\overline{x_{ui}} \vee \overline{x_{vi}})}$

mindestens eine Farbe: $\forall v \in V$: $\underbrace{(x_{v1} \vee x_{v2} \vee \dots \vee x_{vk})}$

[höchstens eine Farbe: ......]

Klauseln ... Φ

ϕ erfüllbar $\Leftrightarrow$ G ist k-färbbar.

Φ in polynomieller Zeit berechenbar. $O(n+m+nk)$.

Entscheidungsprobleme

Ausgabe ist nur ein Bit: JA oder NEIN

$A = \{\text{JA-Eingaben}\} \subseteq \Sigma^*$ .. eine formale Sprache

Für Entscheidungsprobleme gibt es auch eine speziellere Art von Reduktionen: Karp-Reduktionen

$A <_p B$: $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

- $\forall x \in \Sigma^*$: x ist eine JA-Eingabe für A
  $\Leftrightarrow$ $f(x)$ ist eine JA-Eingabe für B
- f ist in polynomieller Zeit berechenbar.

Allgemeinere Reduktion: Turing-Reduktion