Auswahl des k-kleinsten Elementes, randomisiertes Quickselect

17, 22, 12, 16, 2, 7, 33, 1000, 14, 11, 9

$n = 11 \quad k = 6 \qquad$ Median: $k = \frac{n+1}{2}$

- Sortieren $\to O(n \log n)$ Zeit
- $O(n)$ (Es geht auch deterministisch in $O(n)$ Zeit)

Auswahl(S, k):

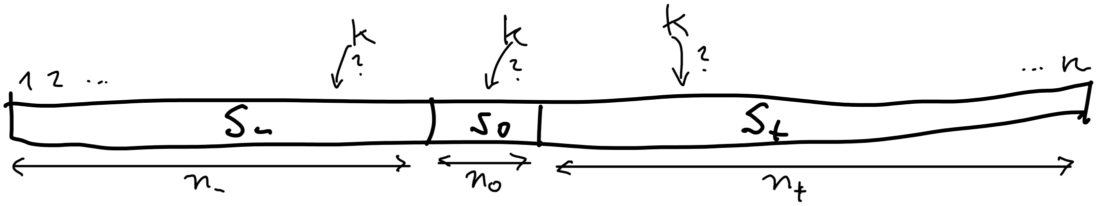
Eingabe: $S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, k $(1 \le k \le n)$

Wir wählen ein Pivotelement $a \in S$ und bilden Teilfolgen

$S_- = [x \in S \mid x < a] \quad n_- = |S_-|$

$S_0 = [x \in S \mid x = a] \quad n_0 = |S_0| \qquad n_- + n_0 + n_+ = n$

$S_+ = [x \in S \mid x > a] \quad n_+ = |S_+| \qquad O(n)$

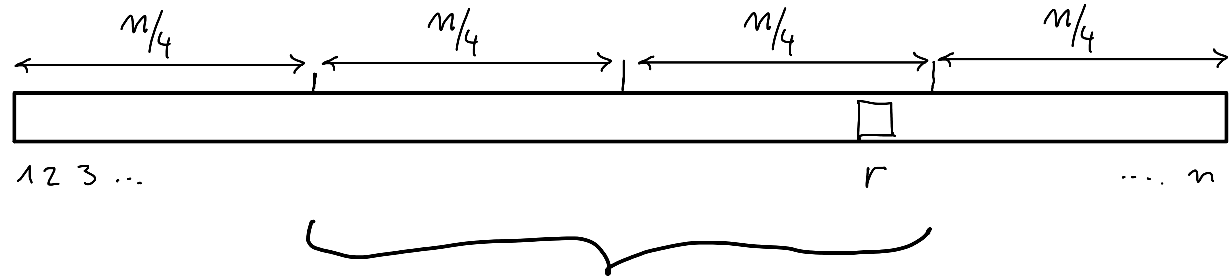


- $k \le n_-$: return Auswahl(S_-, k)
- $n_- < k \le n_- + n_0$: return a
- $k > n_- + n_0$: return Auswahl$(S_+, k - n_- - n_0)$

Schlimmster Fall: $\Theta(n^2)$

Wir wählen das Pivotelement zufällig!

BEHAUPTUNG: Erwartete Laufzeit $= O(n)$



„gutes" Pivotelement:

r = Rang des Pivotelements $\in \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{\text{zufällig gleichverteilt.}}$ $\Rightarrow n_- \leq r-1$

$n_+ \leq n-r$

gutes Pivotelement: $\boxed{\frac{n}{4} \leq r \leq \frac{3n}{4}+1}$ $\Rightarrow \max\{n_-, n_+\} \leq 3/4\, n$

$\Rightarrow$ Es gibt $\geq \frac{n}{2}$ gute Pivotelemente

$s_n \leq \frac{1}{2}$ s_n = Wahrscheinlichkeit für ein schlechtes Pivotelement

$T(n)$ = erwartete Laufzeit von Quickselect

$\hat{T}(n) := \max\{T(1), T(2), \dots, T(n)\} \leq \hat{T}(n+1)$

$$T(n) \leq C.n + \begin{cases} \xrightarrow{s_n} T(n') \text{ mit } n' \leq n-1 & \leq \hat{T}(n) \\ \xrightarrow{1-s_n} T(n') \text{ mit } n' \leq 3/4\, n & \leq \hat{T}(\lfloor 3/4\, n \rfloor) \end{cases}$$

$$T(n) \leq Cn + \underbrace{s_n}_{\leq 1/2} \hat{T}(n) + (1-s_n) \cdot \hat{T}\left(\left\lfloor \tfrac{3}{4} n \right\rfloor\right)$$

$$T(n) \leq Cn + \frac{1}{2}\hat{T}(n) + \frac{1}{2} \cdot \hat{T}\left(\left\lfloor \tfrac{3}{4} n \right\rfloor\right)$$

$T(n-1) \leq$ -"-

$T(n-2) \leq$ -"-

...

$$\hat{T}(n) \leq Cn + \frac{1}{2}\hat{T}(n) + \frac{1}{2}\hat{T}\left(\left\lfloor \tfrac{3n}{4} \right\rfloor\right) \quad \Big| \times 2$$

$$\hat{T}(n) \leq 2Cn + \hat{T}\left(\left\lfloor \tfrac{3n}{4} \right\rfloor\right)$$

BEHAUPTUNG: $\hat{T}(n) \leq 8Cn = O(n)$

vollständige Induktion:

$$\hat{T}(1) \leq 2Cn^{(n=1)} \leq 8Cn \quad \checkmark$$

$$\hat{T}(n) \leq 2Cn + \hat{T}\left(\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor\right) \overset{\text{I.V.}}{\leq} 2Cn + 8C \cdot \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$$

$$\leq \underbrace{2Cn + \underbrace{8C\,\frac{3n}{4}}_{6Cn}}_{8Cn} \quad \checkmark$$