Die Klasse NP (nichtdeterministisch Polynomialzeit)

NP := die Klasse der Entscheidungsprobleme A, die ein polynomielles Zertifikatskriterium f haben.

$f : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \{\text{OK}, \text{UNGÜLTIG}\}$

ist ein polynomielles Zertifikatskriterium für A.

$\Leftrightarrow$
- $\forall x \in \Sigma^*$: $x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \Sigma^*$: $f(x,y) = \text{OK}$
  (y ist ein „Zertifikat" für x)
- $\exists$ Polynome p, q:
  - $f(x,y)$ ist in Zeit $p(|x|)$ berechenbar.
  - Wenn $|y| > q(|x|)$ ist, dann ist $f(x,y) = \text{UNGÜLTIG}$.

Bsp:
- $x = (G, k)$, $y : V \to \{1, \dots, k\}$ eine Färbung für G mit k Farben
- $x = \Phi$, y eine Belegung
- $x = (G, s, t, C)$, y ein Weg von s nach t mit Länge $\leq C$

NP-schwere Probleme („mindestens so schwierig wie alle Probleme in NP")

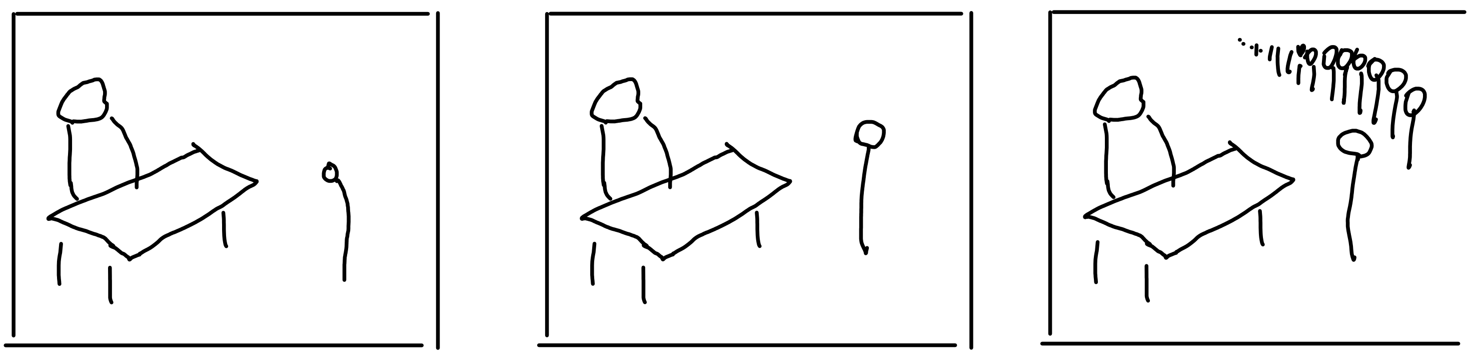
Ein Problem A ist NP-schwer (engl. NP-hard), wenn sich jedes Problem $B \in NP$ in polynomieller Zeit auf A reduzieren lässt. $\forall B \in NP: B <_p A$.

Beobachtung:

Wenn A NP-schwer ist, und wenn $A \in P$ wäre, dann wären <u>alle</u> Probleme in NP polynomiell lösbar.

extrem unwahrscheinlich, aber denkbar:
Unmöglichkeit nicht bewiesen! ($P = NP$ oder $P \neq NP$)

Begründung: $B \in NP$ beliebig. $B <_p A$, $A \in P \Rightarrow B \in P$.



DEF.
Ein Problem A ist <u>NP-vollständig</u>, wenn es NP-schwer ist, und selbst zu NP gehört.

SATZ VON Cook / Levin

$$\boxed{\text{SAT (Erfüllbarkeit) ist NP-schwer.}}$$

Lemma: $\boxed{\text{Wenn } A <_p B \text{ und } A \text{ NP-schwer ist, dann ist } B \text{ auch NP-schwer.}}$

BEWEIS: $\forall C \in NP: \quad \underbrace{C <_p A,\ A <_p B}_{C <_p B}$

Anwendung: SAT $<_p$ GRAPHENFÄRBUNG