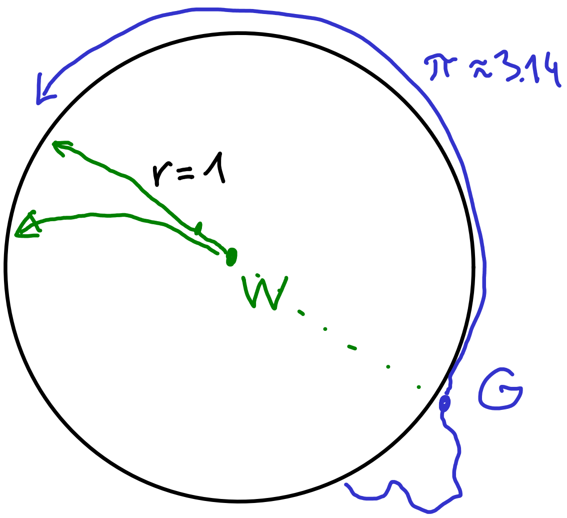
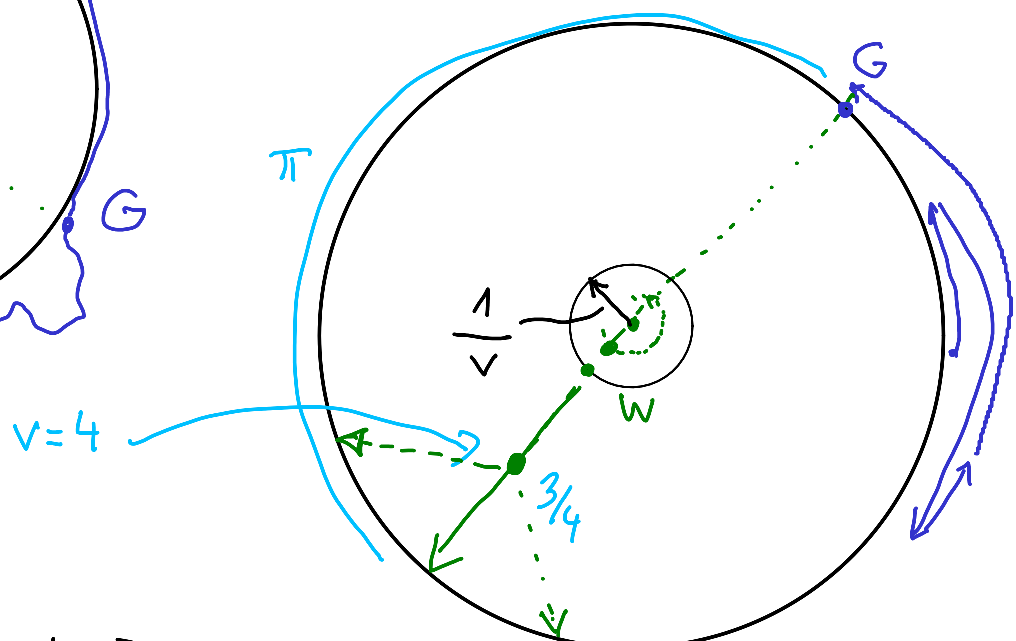
## Der Grintsch und die Weihnachtsgeschenke (Aufgabe 77)




$v_W = 1$

$v_G = v = 4{,}5$



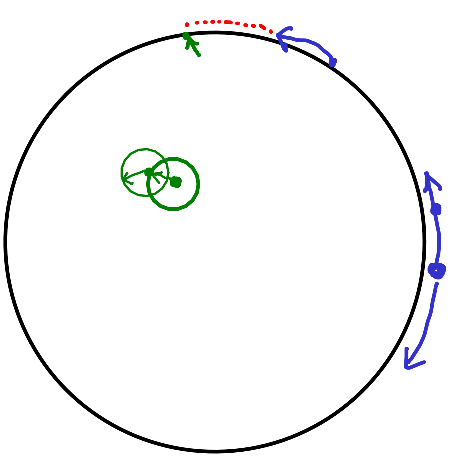

$\frac{3}{4} \cdot v = 3 < \pi$

$$\left(1 - \frac{1}{v}\right) \cdot v = \underbrace{v - 1}_{3.5} \gtrless \pi$$
$$3.5 > \pi$$

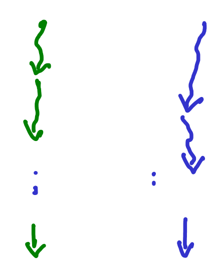
## Abwechselnde Bewegung in kleinen Zeitschritten (Diskretisierung in der Zeit)

Zeitschritt $s$:

Abwechselnd: W bewegt sich bis zu einer Entfernung $\le s$
G bewegt sich bis zu einer Entfernung $\le sv$



- Wer beginnt? W
- Ende erst nach Zug des 2. Spielers. G



Variante ist vorteilhaft für G.

(1.) $opt_W(w, g) =$ Wert des Spieles, (= Abstand vom G, wenn W das Ufer erreicht)
wenn W an Position w und G an Position g ist und wenn W am Zug ist.

$opt_G(w, g) = \dots$ wenn G am Zug ist.

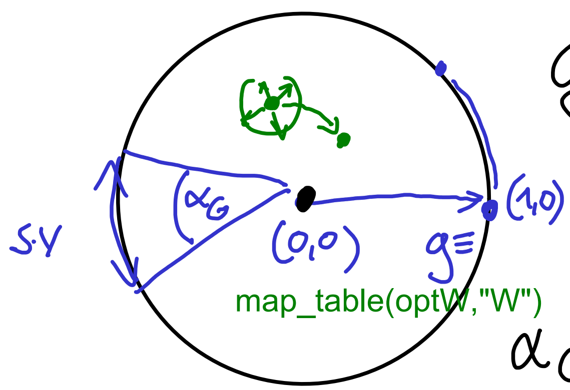
($w \in$ Kreis, $g \in$ Kreisrand)

(2.) $opt_W(w, g) =$ Abstand zwischen w und g entlang des Randes (für $w \in$ Kreisrand)

$$opt_W(w, g) = \max\{opt_G(w', g) \mid \underline{\|w' - w\| \leq s}, \ w' \in \text{Kreis}\}$$

$$opt_G(w, g) = \min\{opt_W(w, g') \mid d(g', g) \leq s.v, \ g' \in \text{Rand}\}$$

entlang des Randes




Gemeinsame Rotation von w und g ändert opt nicht!

O.B.d.A. $g = (1, 0)$ fixiert

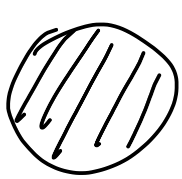
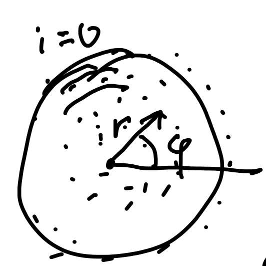
$\alpha_G := s \cdot v =$ Polarwinkel, den G in einem Schritt zurücklegen kann.

$$opt_W(w) = \max\{opt_G(w') \mid \|w' - w\| \leq s, \ w' \in \text{Kreis}\}$$

$$opt_G(w) = \min\{opt_W(w') \mid w' = w \text{ gedreht um höchstens } \pm \alpha_G\}$$

---

Diskretisierung des Raumes

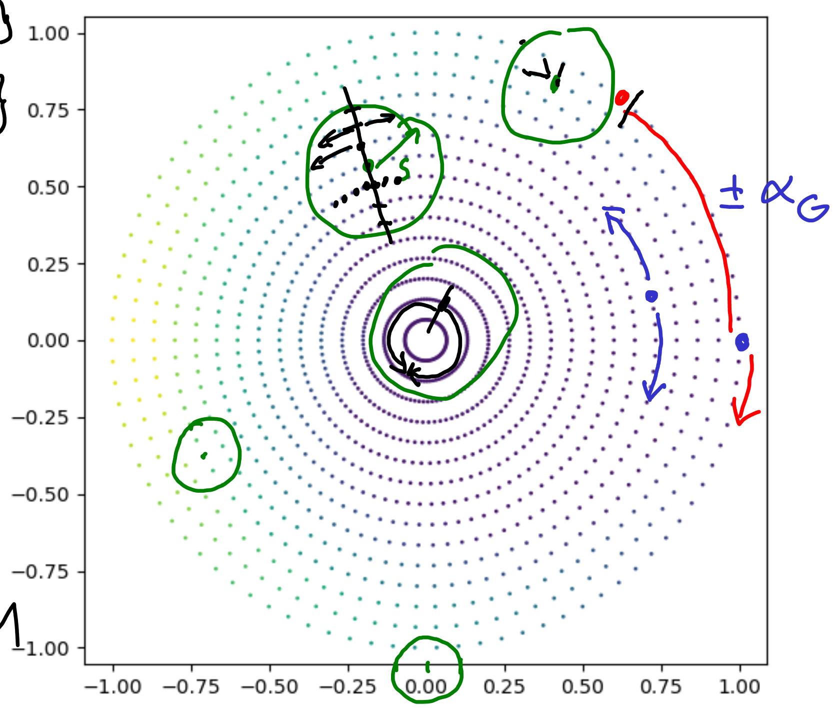
$w \in$  $\Rightarrow$ $w \in$ 


$$w = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$r = 1 - \frac{i}{G_r} \quad i = 0, \dots, G_r - 1$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{G_\varphi} \cdot j \quad j = 0, \dots, G_\varphi - 1$$

$$(*)\begin{cases} optW[i,j] := \max\{optG[i',j'] \mid ..\} \\ optG[i,j] := \min\{optW[i,j'] \mid ...\} \end{cases}$$




$$optW[0,j] = \frac{2\pi}{G_\varphi} \cdot \min\{j, G_\varphi - j\}$$

eine mögliche Lösung:

$optW[i,j] = optG[i,j] = 13$ für $i \geq 1$

- Initialisiere alle Werte (für $i \geq 1$) auf 0 und interpretiere (*) als Iterationsvorschrift.

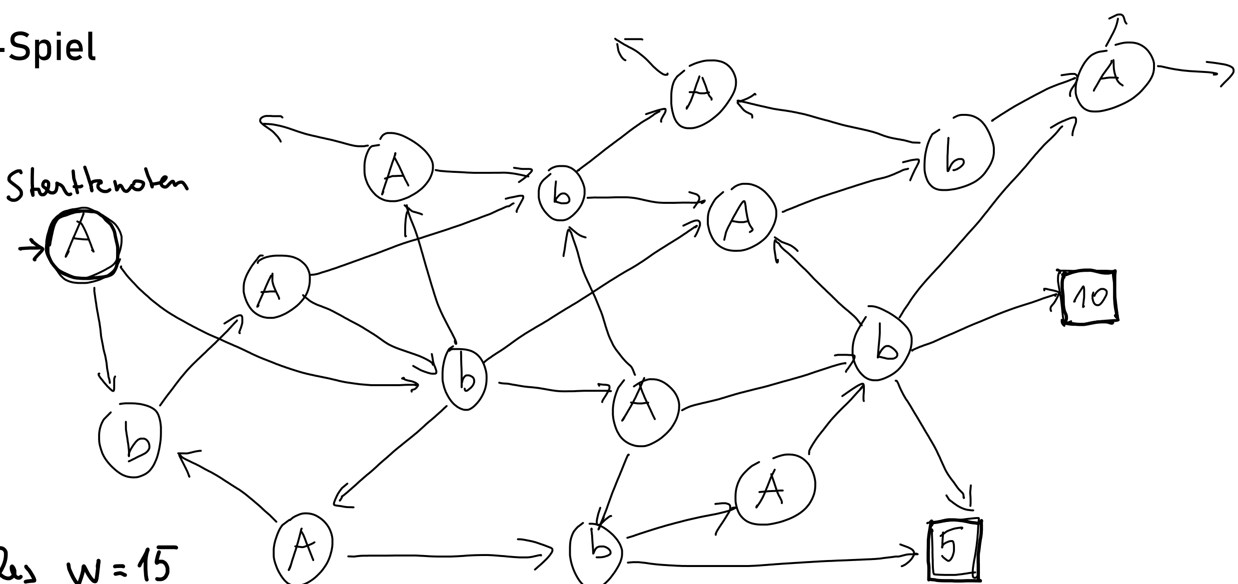
Die Werte OptG und OptW wachsen monoton.

nur endlich viele Werte $\Rightarrow$ Die Iteration stabilisiert sich.

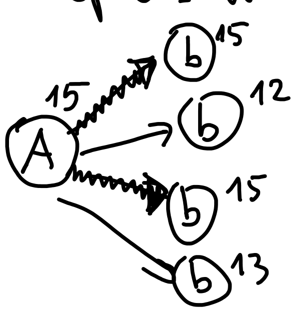
$\Rightarrow$ Lösung existiert.

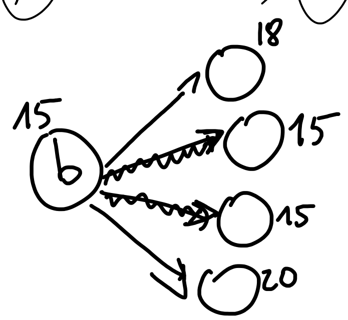
---

2-Personen-Spiel

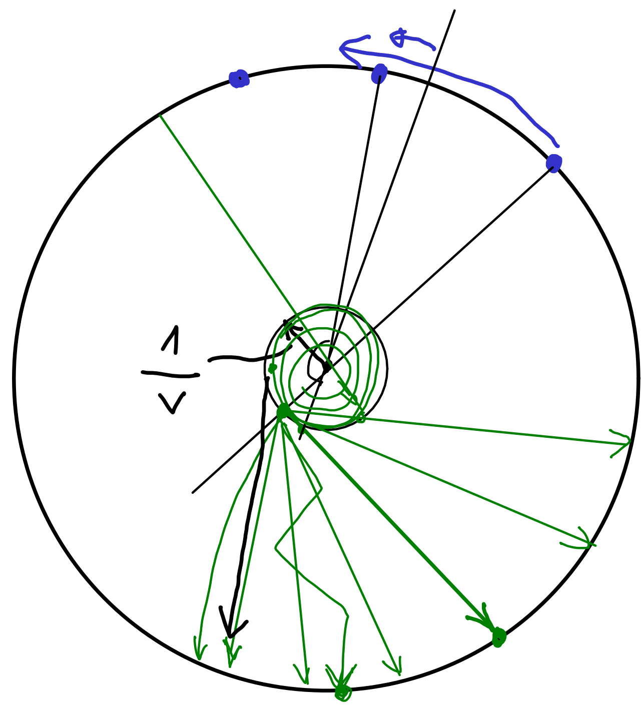



Wert des Spiels $w = 15$

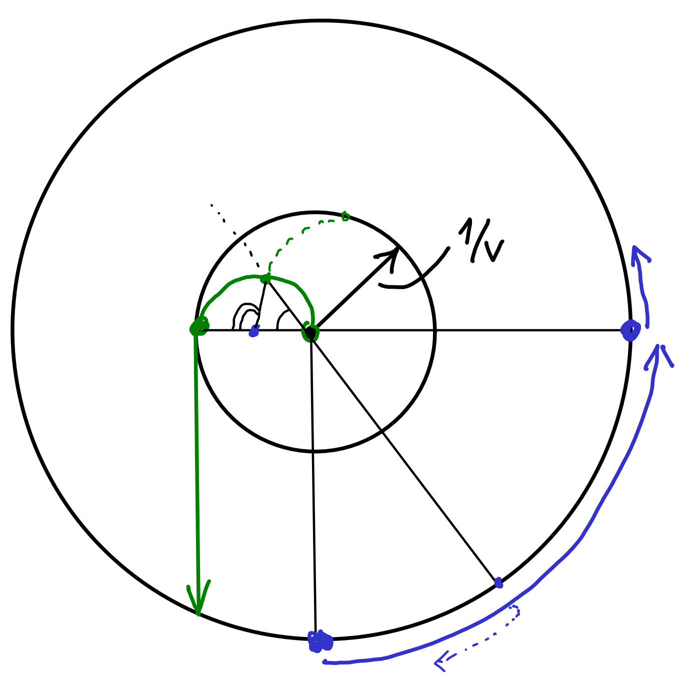


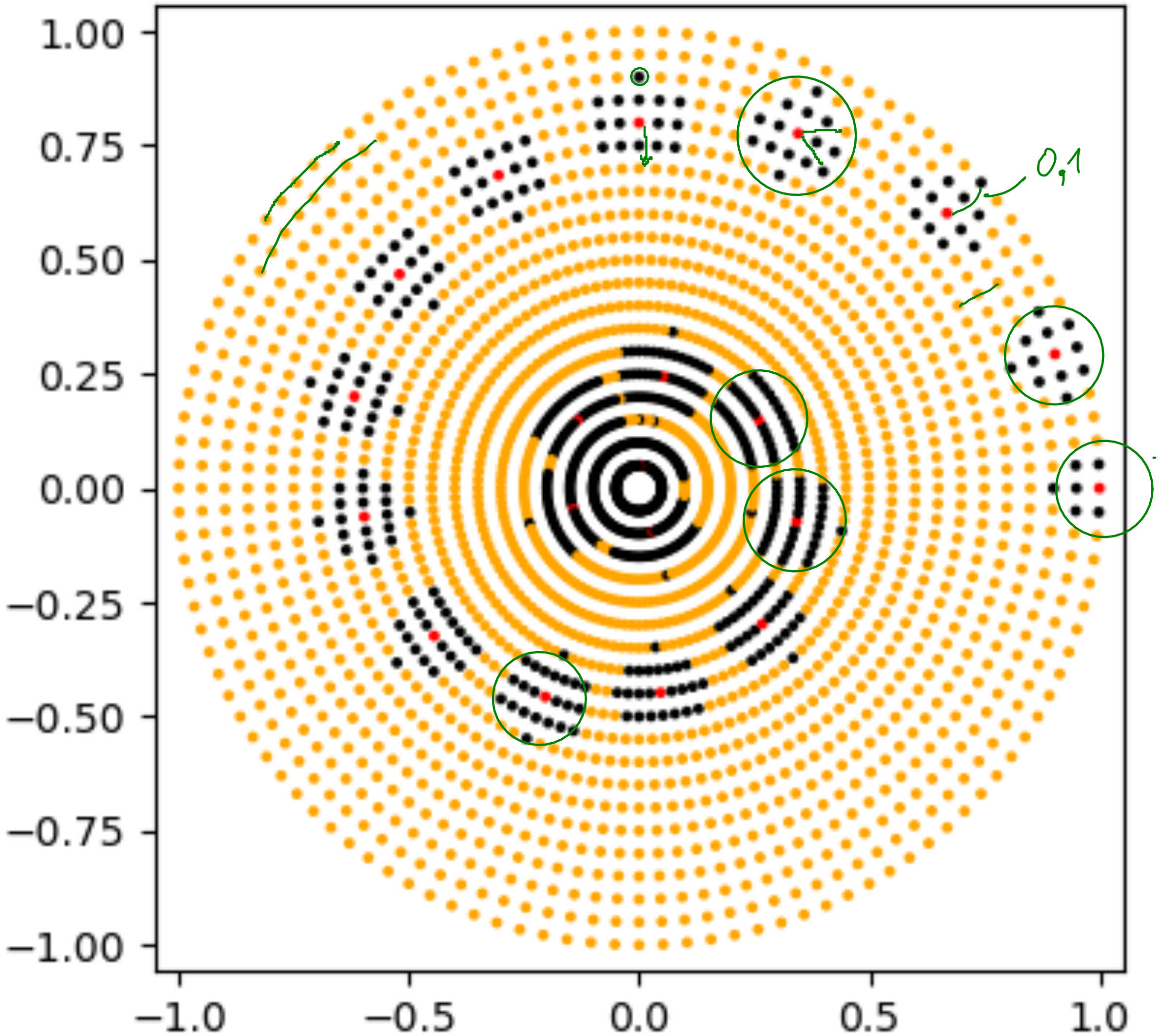
## Optimale Strategie



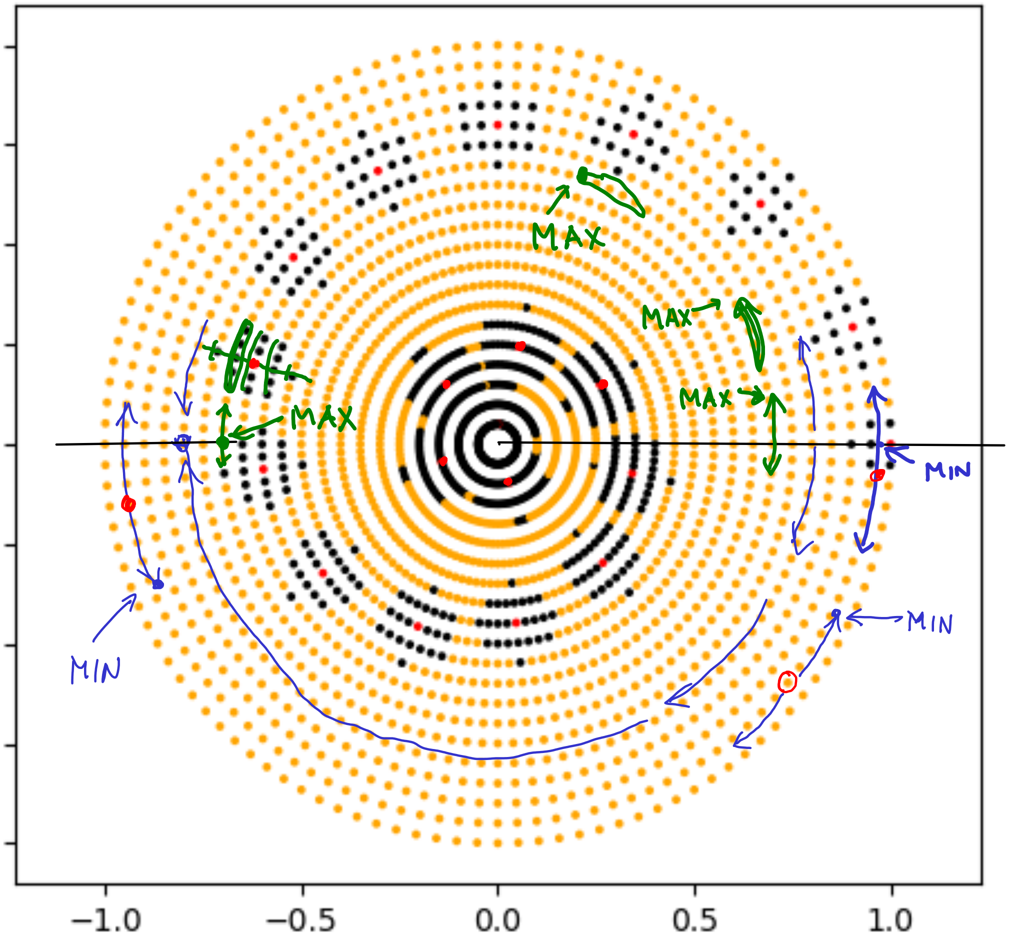

## Erreichen der Ausgangslage



Rechengenauigkeit



## Monotonie auf konzentrischen Kreisen




LEMMA: $\mathrm{optW}[i,j] = \mathrm{optW}[i, G_q - j]$ (Symmetrie)

$$\mathrm{optW}[i,0] \leq \mathrm{optW}[i,1] \leq \mathrm{optW}[i,2] \leq \ldots \leq \mathrm{optW}[i, \lfloor \tfrac{G_q}{2} \rfloor]$$

und das gleiche für $\mathrm{optG}$.

Beweis durch vollständige Induktion.

(*)
$$\mathrm{optW}[i,j] := \max \{ \mathrm{optG}[i',j'] \mid \| P_{i'j'} - P_{ij} \| \leq s \}$$
$$\mathrm{optG}[i,j] := \min \{ \mathrm{optW}[i,j'] \mid P_{ij'} = P_{ij} \text{ gedreht um höchstens } \pm \alpha_G \}$$

- Die Behauptung gilt auch für die lexikographische Ordnung von $(v, -k)$ mit $v$ = Wert, $k$ = Anzahl Züge