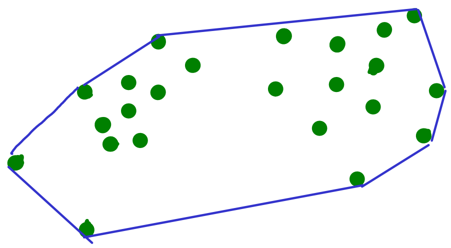
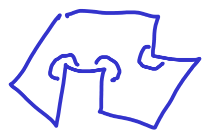
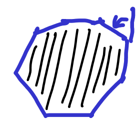
Geometrische Probleme : konvexe Hülle = das kleinste konvexe* Polygon, das eine gegebene Punktmenge S enthält.



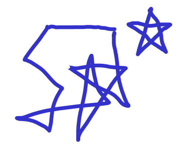
*Polygon ohne einspringende Ecken.



nicht konvex

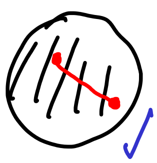


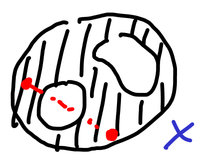
konvex

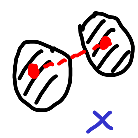


gar nicht.

DEF. Eine Menge heißt <u>konvex</u>, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.



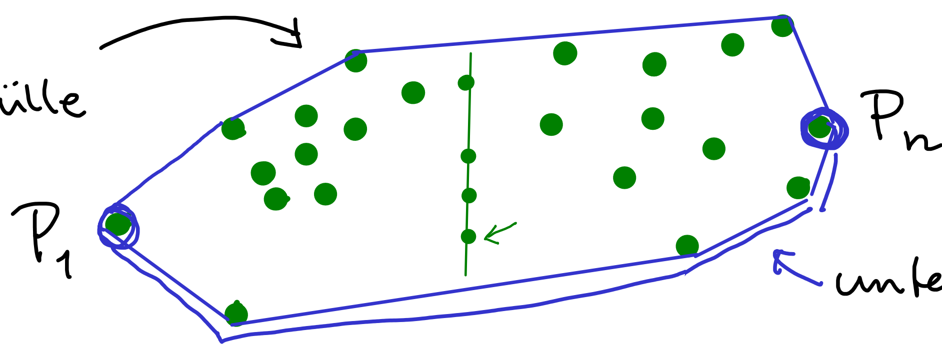




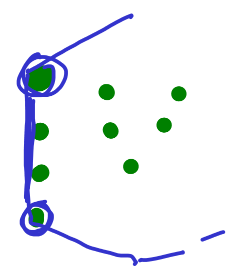
konvexe Hülle

Algorithmus : inkrementell von links nach rechts

obere konvexe Hülle



untere konvexe Hülle



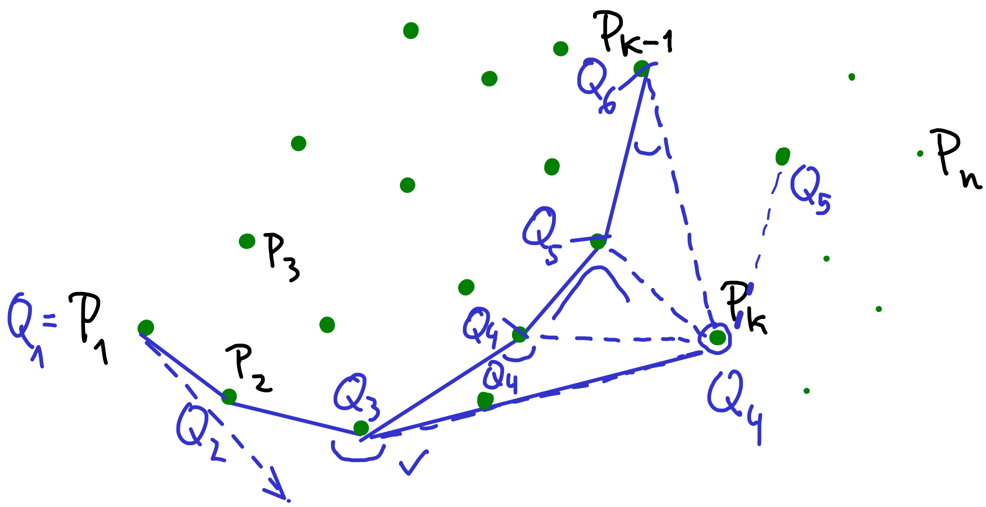
$$S = \{P_1, \dots, P_n\} \qquad P_i = (x_i, y_i)$$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

ANNAHME :

Alle x-Koordinaten sind verschieden.

(VORVERARBEITUNG)



Untere konvexe Hülle der Punkte $P_1 \dots P_{k-1}$ sei die Teilfolge $Q_1 Q_2 \dots Q_\ell$.

$(Q_1 = P_1, \; Q_\ell = P_{k-1})$

$k-1 \to k$:

(*) <u>while</u> $\ell \geq 2$ <u>and</u> $(Q_{\ell-1}, Q_\ell, P_k)$ macht einen Rechtsknick oder liegen auf einer Geraden :

$\quad \ell := \ell - 1$

$\ell := \ell + 1; \quad Q_\ell := P_k$

Q ist ein Stapel mit Länge $\leq n$.
z.B. ein Feld der Länge n mit „Stapelzeiger" ℓ.

$\ell := 1; \quad Q_1 := P_1$

<u>for</u> $k := 2, 3, \dots, n$:

<u>while</u> $\ell \geq 2$ <u>and</u> $(Q_{\ell-1}, Q_\ell, P_k)$ macht einen Rechtsknick oder liegen auf einer Geraden :

$\quad \ell := \ell - 1$

$\ell := \ell + 1; \quad Q_\ell := P_k$

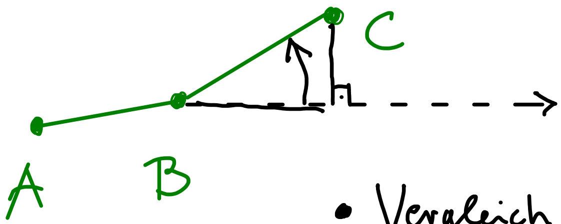
- ℓ wird genau $(n-1)$-mal um 1 vergrößert
- ℓ wird in jedem inneren Schleifendurchlauf um 1 verkleinert.
- $\ell \geq 1$

Die Anzahl der inneren Schleifendurchläufe ist $\leq n-1$.

Die konvexe Hülle einer nach x sortierten Punktmenge kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.

Gesamtlaufzeit (mit Sortieren) $O(n \log n)$. Speicher $O(n)$

Orientierungstest: Linksknick oder Rechtsknick?



- Vergleich der Polarwinkel?

$$\arctan \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

- Vergleich der Steigungen

$$\frac{y_C - y_B}{\underbrace{x_C - x_B}_{>0}} \overset{>}{\underset{<}{=}} \frac{y_B - y_A}{\underbrace{x_B - x_A}_{>0}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Linksknick} \\ \text{kein Knick} \\ \text{Rechtsknick} \end{array}$$

$$(y_C - y_B)(x_B - x_A) \overset{>}{\underset{<}{=}} (y_B - y_A)(x_C - x_B)$$

$$\Leftrightarrow D = \underbrace{\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_B \\ y_B - y_A & y_C - y_B \end{vmatrix}}_{} \overset{>}{\underset{<}{=}} 0$$

$$D := \begin{vmatrix} \vec{B} - \vec{A} & \vec{C} - \vec{B} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_A - x_B & x_B & x_C - x_A \\ y_A - y_B & y_B & y_C - y_A \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} x_A - x_B & x_C - x_A \\ y_A - y_B & y_C - y_A \end{vmatrix} \times(-1) \checkmark$$

SATZ: (Orientierungstest)

$$D \overset{>}{\underset{<}{=}} 0 \Leftrightarrow$$

Dreieck ABC ist im Gegenuhrzeigersinn orientiert. (+)

Die Punkte ABC liegen auf einer Geraden.

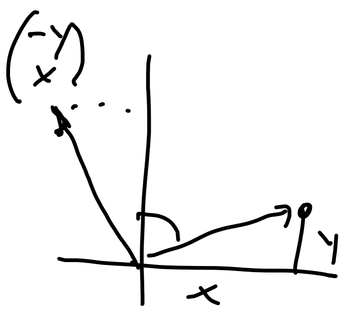
Dreieck ABC ist im Uhrzeigersinn orientiert. (−)

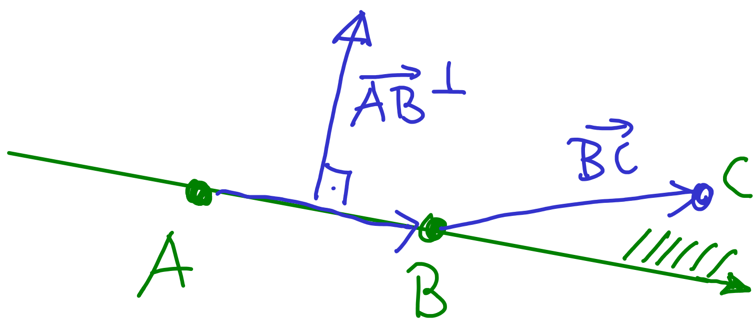
$$D = \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_B \\ y_B - y_A & y_C - y_B \end{vmatrix} = (y_C - y_B)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_B)$$

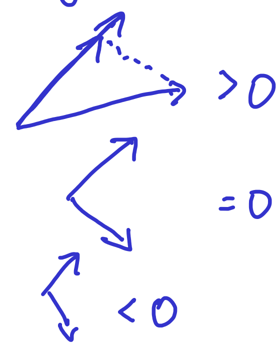
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -(y_B - y_A) \\ x_B - x_A \end{pmatrix}}_{\vec{AB}^{\perp}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}}_{\vec{BC}}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$\vec{AB}^{\perp} = \vec{AB}$ um 90° nach links gedreht

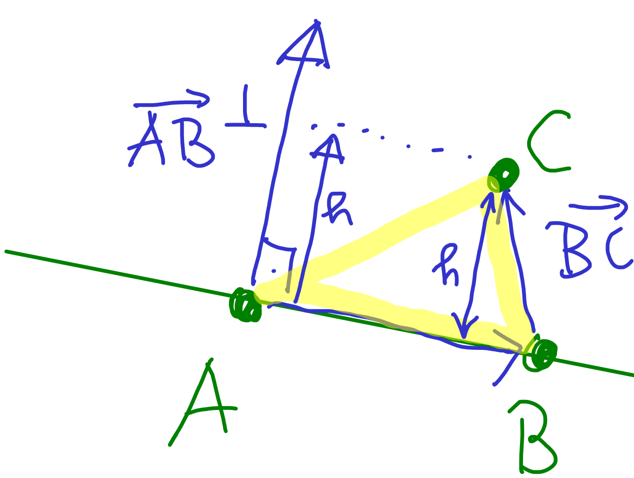






$$D = \vec{AB}^{\perp} \cdot \vec{BC} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \iff C \text{ liegt } \begin{Bmatrix} \text{links von} \\ \text{auf} \\ \text{rechts von} \end{Bmatrix} \text{ der gerichteten Geraden } \vec{AB}$$

$D = 2 \times$ (orientierter Flächeninhalt des Dreiecks ABC)



$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\text{Grundlinie}}_{\overline{AB}} \times \text{Höhe}$$

$$D = \pm \vec{AB}^{\perp} \cdot \vec{BC} = \pm \overline{AB} \times h$$