Färbbarkeit ist NP-schwer

GRAPHENFÄRBUNG: (Entscheidungversion)

Eingabe: • Ein ungerichteter Graph G
• Eine Zahl k.

Frage: Ist G mit k Farben färbbar?

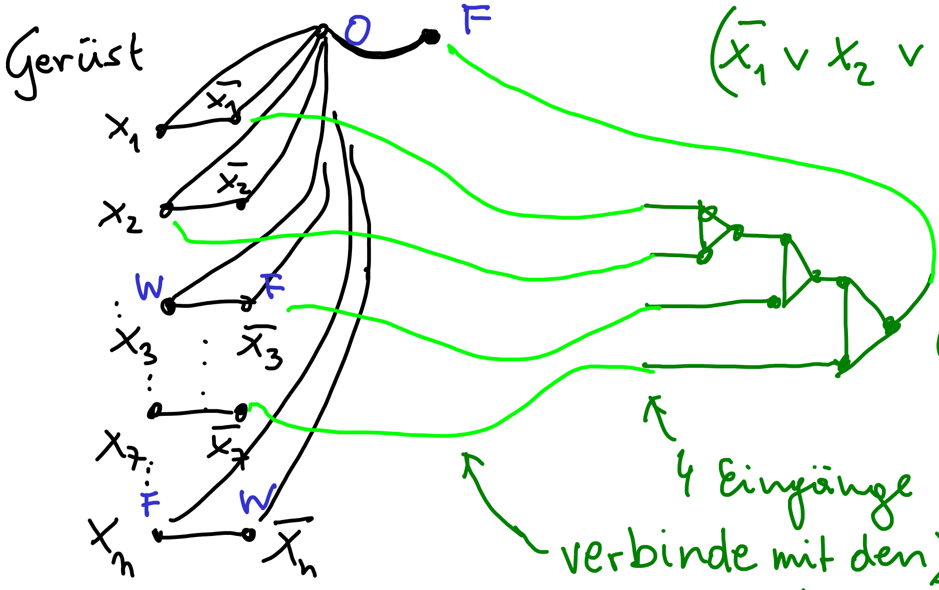
3-FÄRBBARKEIT

Eingabe: Ein ungerichteter Graph G

Frage: Ist G mit 3 Farben färbbar?

SAT $<_p$ 3-FÄRBBARKEIT $<_p$ GRAPHENFÄRBUNG ✓

Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ 3 Farben O, W, F



$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_7)$ Klausel

FÜR JEDE KLAUSEL

1 Ausgang

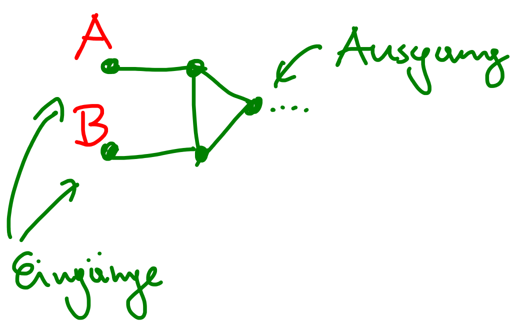
4 Eingänge

verbinde mit den ~~Negationen der~~ Literalen, die in der Klausel vorkommen

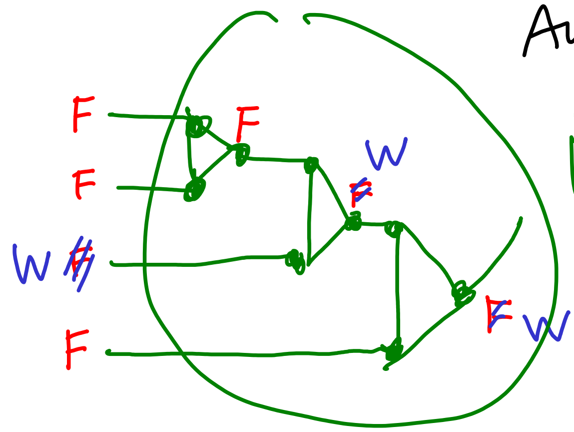
Behauptung: Graph ist 3-färbbar $\overset{\Leftarrow}{\underset{}{\Leftrightarrow}}$ $\Rightarrow$ Formel ist erfüllbar.

(Der Graph ist in polynomieller Zeit berechenbar.) ✓

Beweis der Behauptung:



- Wenn beide Eingänge die <u>gleiche</u> Farbe haben, dann muss der Ausgang <u>auch</u> diese Farbe haben ✓
- Wenn beide Eingänge verschiedene Farben haben, dann kann der Ausgang jede beliebige Farbe haben. ✓



eine Vorrichtung (gadget)

- NP-schwer
- NP
- Reduktion

3-SAT (Spezialfall von SAT, wo jede Klausel <u>genau 3</u> Literale enthält)

$SAT <_p 3\text{-}SAT$ ← ist NP-schwer

Idee der Reduktion:

$$(\underbrace{a \vee b}_{A} \vee \underbrace{c \vee d \vee e \vee f}_{B}) \Leftrightarrow$$

neue Variablen

$$\exists \ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \{W, F\}: (a \vee b \vee \ell_1) \wedge (\bar{\ell}_1 \vee c \vee \ell_2) \wedge (\bar{\ell}_2 \vee d \vee \ell_3) \wedge (\bar{\ell}_3 \vee e \vee f)$$

$$A \vee B \Leftrightarrow \exists \ell \in \{W, F\}: (A \vee \underset{W}{\ell}) \wedge (\underset{F}{\bar{\ell}} \vee B)$$

$\boxed{2\text{-}SAT \in P}$