Edit-Abstand

FENSTER, FENESTRA (lat.)

FENESTRA
⇓
FENSTRA
⇓
FENSTEA
⇓
FENSTER

FENSTR
⇓
FENSTER

= die kleinste Anzahl von Änderungen einzelner Buchstaben (Einfügungen, Streichungen, Ersetzungen), die ein gegebenes Startwort $a = a_1 a_2 \ldots a_m$ in ein gegebenes Zielwort $b = b_1 b_2 \ldots b_n$ transformieren.

Wörter a und b aneinander ausrichten: (alignment)

```
FENEST RA
|||  || ^ |
FEN  STER
```

---

① T_{ij} = Edit-Abstand zwischen $a_1 \ldots a_i$ und $b_1 \ldots b_j$ $\begin{pmatrix} 0 \le i \le m \\ 0 \le j \le n \end{pmatrix}$

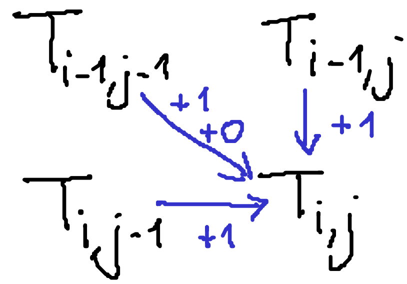
T_{mn} = Gesamtproblem

②
$$T_{ij} = \min \begin{cases} 1 + T_{i,j-1} & \text{Einfügen von } b_j \\ 1 + T_{i-1,j} & \text{Löschen von } a_i \\ 1 + T_{i-1,j-1} & \text{Ersetzen von } a_i \text{ durch } b_j \\ T_{i-1,j-1} & \text{falls } a_i = b_j \end{cases}$$

$(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$

2b. $T_{0,j} = j \quad (0 \le j \le n)$, $\quad T_{i,0} = i \quad (0 \le i \le m)$

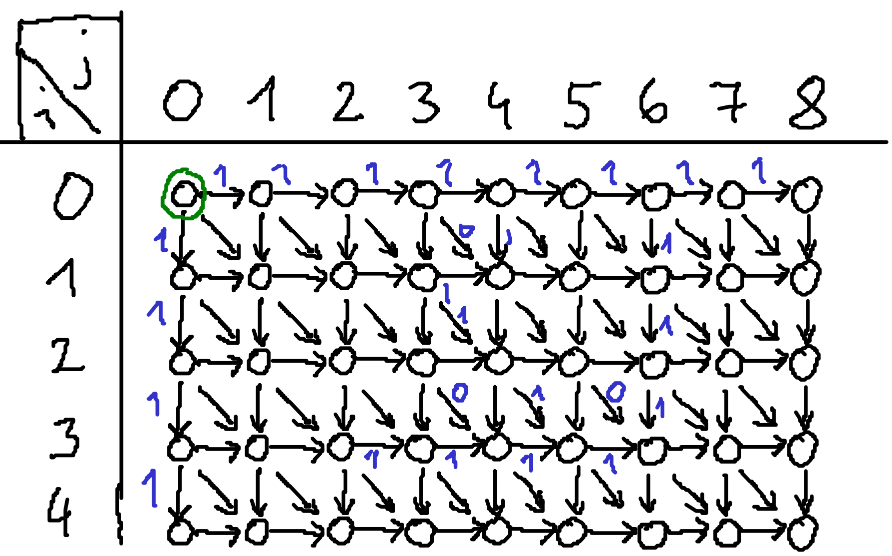
T_{ij}	$i \backslash j$	0	F 1	E 2	N 3	E 4	S 5	T 6	R 7	A 8
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7
E	2	2	1	0	1	2	3	4	5	6
N	3	3	2	1	0	1	2	3	4	5
S	4	4	3	2	1	1	1	2	3	4
T	5	5	4	3	2	2	2	1	2	3
E	6	6	5	4	3	2	3	2	2	3
R	7	7	6	5	4	3	3	3	2	3

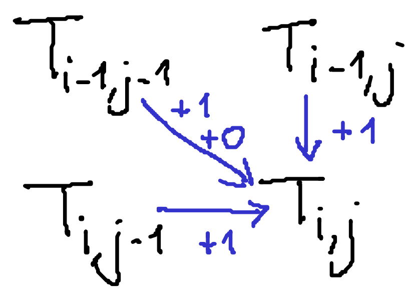


Laufzeit $O(mn)$, Speicher $O(mn)$

- verallgemeinertes Problem mit Gewichten (dürfen von a_i und b_j abhängen)

Wege in azyklischen Graphen





T_{ij} = kürzester Abstand vom Knoten $(0,0)$ zum Knoten (i,j) im azyklischen gerichteten Graphen mit Kantenlängen $c_{uv} \in \{0,1\}$

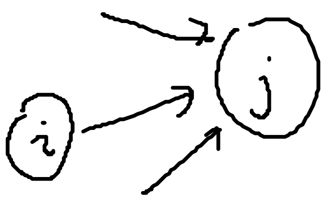
- Viele dynamische-Programmierungsalgorithmen lassen sich als kürzeste- (oder längste-) Wegeprobleme in einem azyklischen Graphen von einem Startknoten s zu einem Zielknoten t interpretieren.

Kürzester Weg von s nach t in einem azyklischen Graphen

1. W_j = Länge des kürzesten Weges von s nach j $(j \in V)$

2. $W_j = \min \{ W_i + c_{ij} \mid (i,j) \in E \} \quad (j \neq s)$

2b. $W_s = 0$

3.  Topologisches Sortieren!

$v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n$: Kanten $(v_i, v_j) \in E$ nur für $i < j$

$s = v_a \quad t = v_b$

$W_a := 0$; for $j = a+1, .., b$: Löse 2.

Ergebnis $= W_b$

Laufzeit und Speicher $O(m+n)$

Kürzeste Wege von einem Startknoten s zu allen anderen Knoten in einem azyklischen Graphen können in $O(m+n)$ Zeit und Speicher berechnet werden.

$c_{ij} \in \mathbb{R}$ beliebig