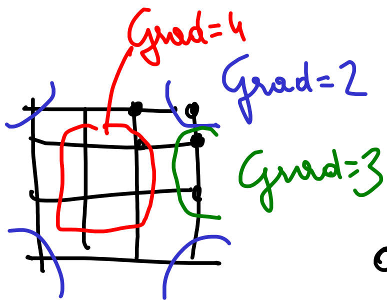
ALP3 Algorithmen Datenstrukturen Datenabstraktion

Freie Universität Berlin

Das 15-Spiel

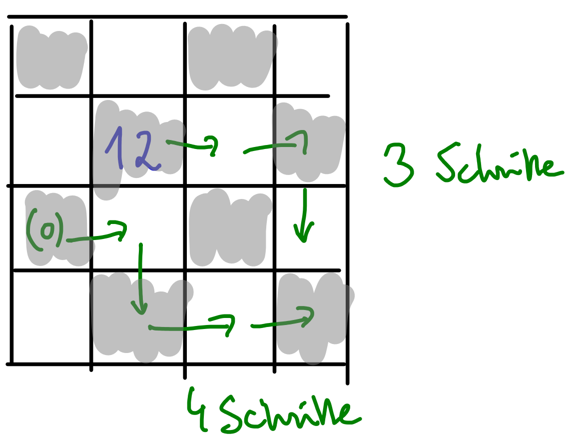
$$\#\text{Knoten} = \frac{16!}{2} \approx 10 \underbrace{\text{Billionen}}_{10^{12}} \text{Knoten}$$

Der Graph zerfällt in 2 Komponenten („gerade" und „ungerade")



$$\text{durchschnittlicher Grad} = \frac{4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{16} = 3$$

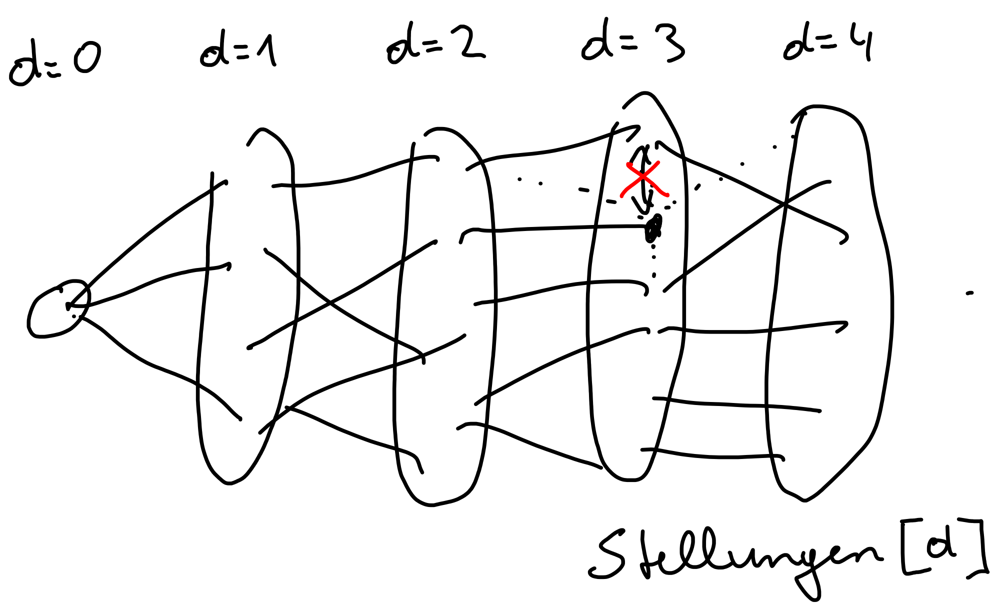
$$\#\text{Kanten} = \#\text{Knoten} \cdot \frac{3}{2}$$



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	(0)

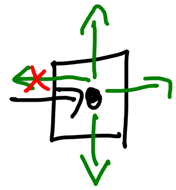
„Abstand" = $\sum'$ dist(aktuelle Position, Zielposition)

Alle Plättchen inkl. „0"

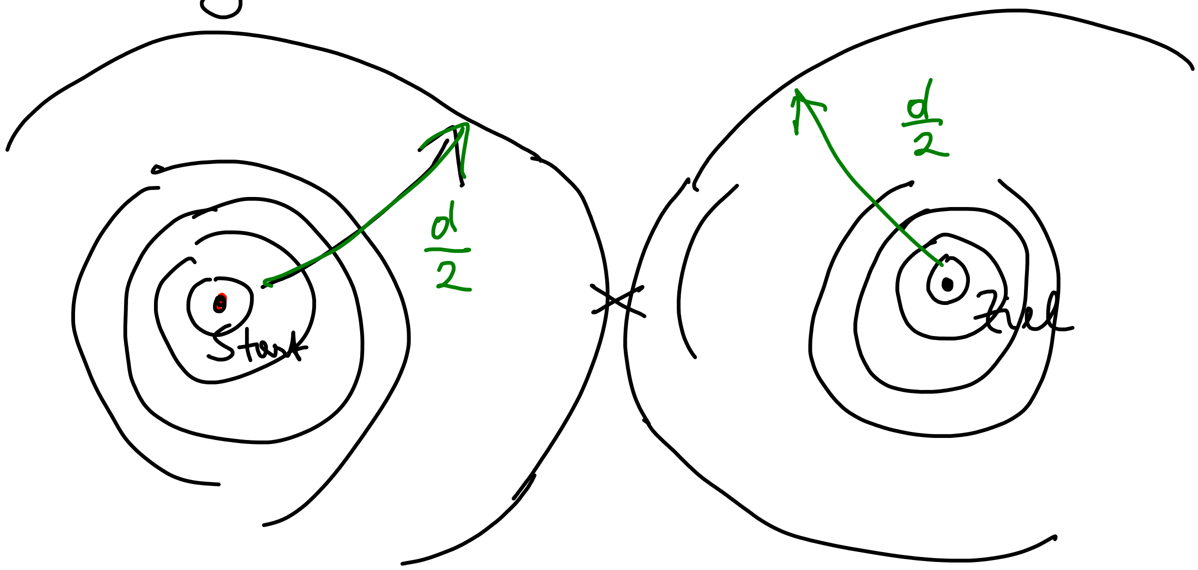


bipartiter Graph!

Verbesserungen.



Gleichzeitig vom Start und vom Ziel suchen !



Dijkstra / Breitensuche

Prioritätswarteschlange:

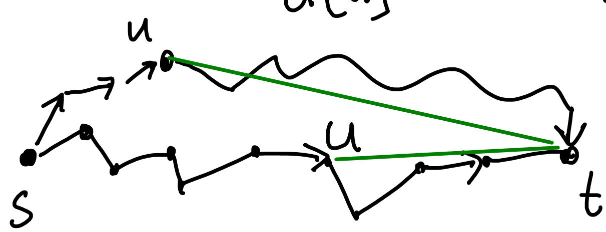
◇ geordnet nach $d[u] = \mathrm{dist}(s, u)$ (Startknoten: s)

! geordnet nach $\boxed{\underbrace{\mathrm{dist}(s,u)}_{d[u]} + \underbrace{\mathrm{dist}(u,t)}_{??}}$ (Zielknoten: t)

SCHÄTZEN!

⇓

$h(u)$



Nur die Knoten auf dem kürzesten Weg von s nach t werden besucht! (Knoten mit $\mathrm{dist}(s,u) + \mathrm{dist}(u,t) = \mathrm{dist}(s,t)$)

Heuristische Funktion $h(u)$: Schätzung für $\mathrm{dist}(u,t)$

Bsp. $\mathrm{dist}(u,t)$ ... Distanz im Straßennetz

$h(u)$ ... Luftlinie zwischen u und t

$$h(u) \leq \mathrm{dist}(u,t)$$

Algorithmus A* : Prioritätswarteschlange nach $d[u] + h(u)$

(Heuristische Suche)

P. E. Hart, N. J. Nilsson, B. Raphael: (1968)

Bestimme $\min \{ d[v] + h(v) \mid \underbrace{v \notin F}_{\text{unfertige Knoten}} \}$

(*) Es kann passieren, dass $d[v]$ für einen Knoten $v \in F$ vermindert wird.

→ $F := F - \{v\}$ Knoten werden mehrfach bearbeitet

→ Ignorieren

Eigenschaften der heuristischen Funktion

(a) h heißt <u>zulässig</u> $\iff$ $0 \le h(u) \le \text{dist}(u,t)$

(b) h heißt <u>konsistent</u> $\iff$ $h(u) \le c_{uv} + h(v)$

$[\text{dist}(u,t) \le c_{uv} + \text{dist}(v,t)]$

konsistent $\wedge$ $h(t)=0$ $\Rightarrow$ zulässig

- (a) $\Rightarrow$ A^* findet optimalen Weg (falls (*) nicht ignoriert wird)
  - potentielle exponenzielle Laufzeit
- (b) $\Rightarrow$ A^* findet optimalen Weg, und (*) tritt nicht auf.
  $\rightarrow$ Laufzeit $O((m+n)\log n)$

---

modifizierte Kosten $\boxed{\bar{c}_{uv} := c_{uv} + h(v) - h(u)}$

Weg $W = u_0 u_1 u_2 \dots u_k$

$$\bar{c}(W) = \bar{c}_{u_0u_1} + \bar{c}_{u_1u_2} + \dots$$

$$= c_{u_0u_1} + \cancel{h(u_1)} - h(u_0) + c_{u_1u_2} + \cancel{h(u_2)} - \cancel{h(u_1)} + \dots + c_{u_{k-1}u_k} + h(u_k) - \cancel{h(u_{k-1})}$$

$$= c(W) + h(u_k) - h(u_0)$$

kürzester Weg von s nach t bezüglich $\bar{c}$ = kürzester Weg von s nach t bezüglich c

h konsistent $\iff$ $\bar{c}_{uv} \ge 0$ für alle uv

$\boxed{A^* \text{ für konsistentes } h \equiv \text{Alg. v. Dijkstra für } \bar{c}}$

Beweis: $\bar{d}[v] = d[v] + h(v) - h(s)$

Wege von s nach v

Dijkstra: Wähle $\min\{\bar{d}[v] \mid v \in F\}$

$$= \underbrace{\min\{d[v] + h(v) - \cancel{h(s)} \mid v \in F\}}_{A^*} - h(s)$$

Anwendung auf das 15-Spiel

Abstandsänderung bei einem Zug $\in \{-2, 0, 2\}$

$h(u) := \frac{\text{Abstand}}{2} \leq dist(u, t)$ zulässig ✓

$h(t) = 0$

$h(u) \leq \underbrace{c_{uv}}_{1} + h(v)$ konsistent ✓

$A^* \rightsquigarrow$ Dijkstra mit $\bar{c}_{uv} = \underbrace{1 + h(v) - h(u)}_{\in 0, 1, 2}$