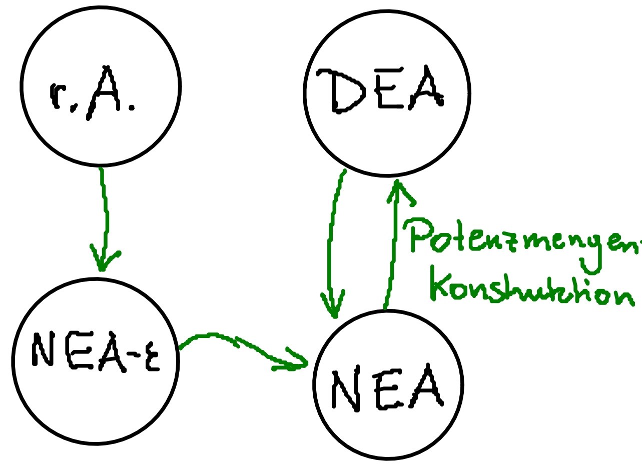
regulärer Ausdruck → endlicher Automat

Syntaxdiagramm: graphische Darstellung der Struktur eines regulären Ausdrucks



NEA mit ε-Übergängen (NEA-ε)

$$\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \qquad q \xrightarrow{\varepsilon} q'$$

für einen NEA-ε $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

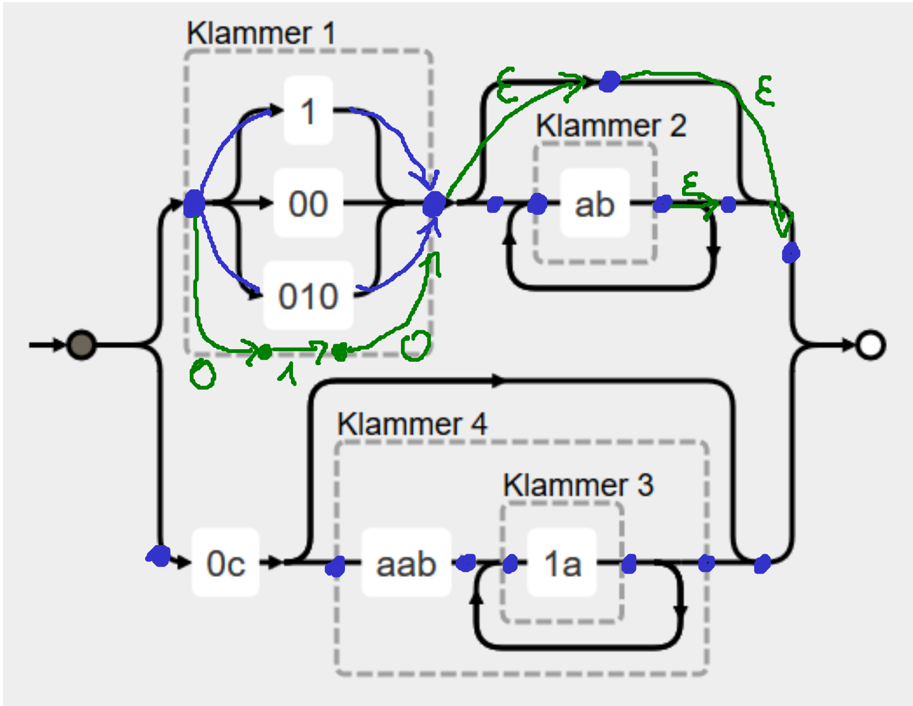
<u>Def.</u> Ein <u>Berechnungsweg</u> ist eine abwechselnde Folge $(r_0, x_1, r_1, x_2, r_2, \dots, x_n, r_n)$ von Zuständen $r_i \in Q$ und Symbolen $x_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, mit

- $r_0 = q_0$
- $(r_{i-1}, x_i, r_i) \in \delta$ für $i = 1, \dots, n$

Ein <u>akzeptierender</u> Berechnungsweg ist einer mit $r_n \in F$.

Er akzeptiert das Wort $x_1 x_2 \dots x_n \in \Sigma^*$.

… $L(A)$



Induktiver Aufbau eines regulären Ausdrucks

Bausteine

- $\{x\}$, $x \in \Sigma$
- $\{\varepsilon\}$
- $\emptyset$

Aufbau

- $R_1 R_2$
- $R_1 \cup R_2$
- R_1^*

für reguläre Ausdrücke R_1, R_2

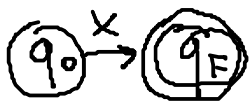
Aus diesen drei Bausteinen lassen sich mit den drei Konstruktionsregeln alle regulären Ausdrücke aufbauen.

endliche Mengen: $\{010, 0\} = \{0\}\{1\}\{0\} \cup \{0\}$

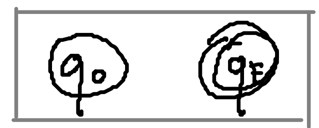
Für jeden regulären Ausdruck R konstruieren wir induktiv einen NEA-ε $A=A_R$ mit folgenden Eigenschaften:

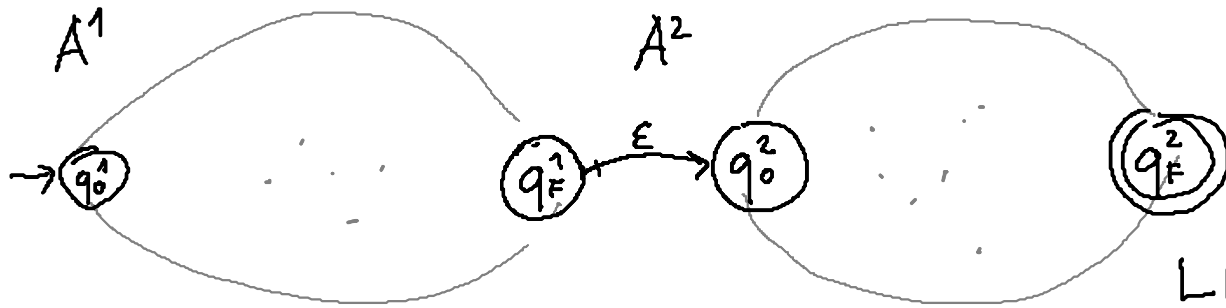
$$A=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$$

- A hat einen einzigen akzeptierenden Zustand $q_F \neq q_0$
  $F=\{q_F\}$
- $L(A)=R$

- $R=\{x\}$ 

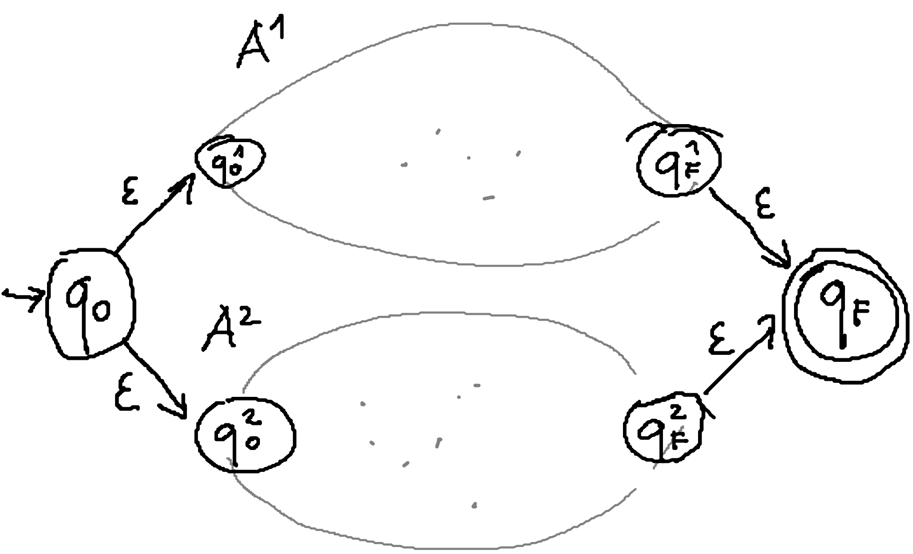
$x\in\Sigma$ oder $x=\varepsilon$

- $R=\emptyset$ 

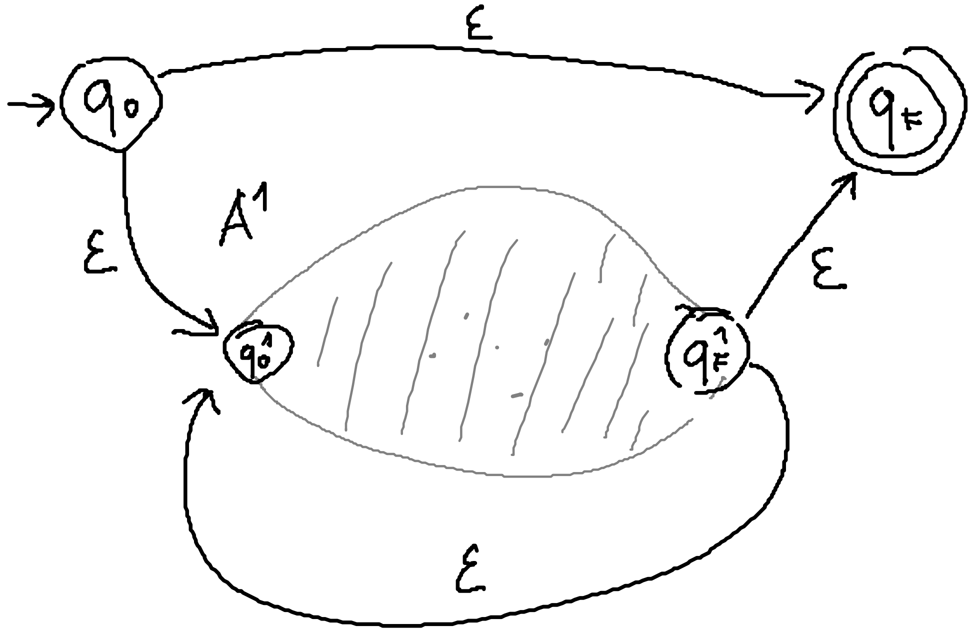


$L(A^1)=R^1$
$L(A^2)=R^2$

$L(A)=R^1R^2$



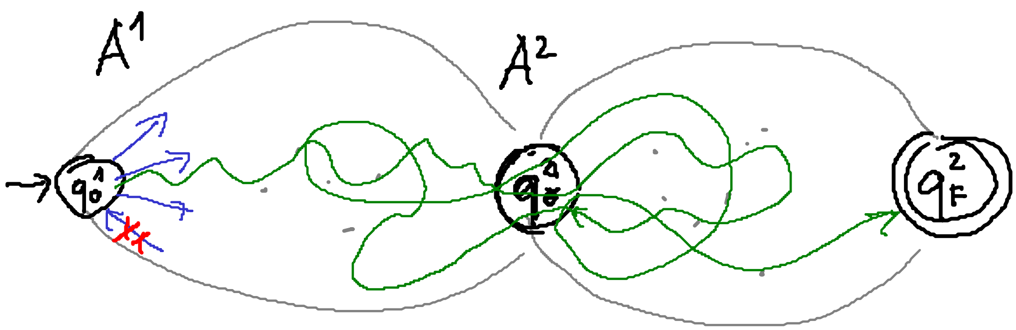
$L(A)=L(A_1)\cup L(A_2)$

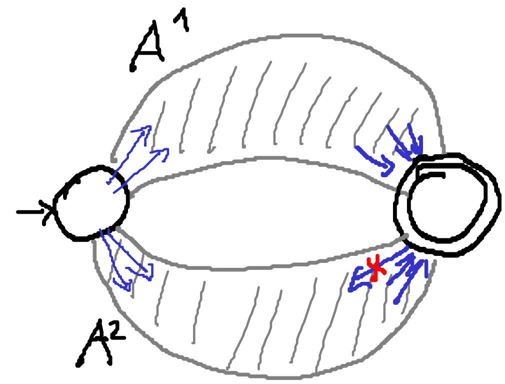


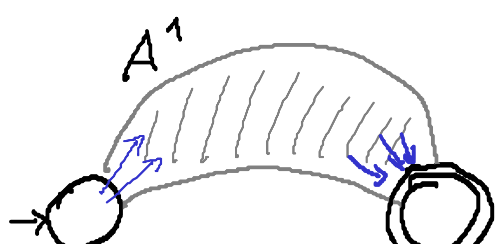
$$L(A) = \left(L(A_1)\right)^*$$

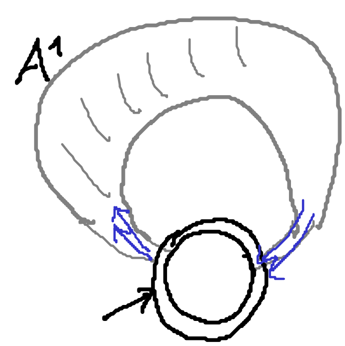
$\square$

Notwendigkeit der ε-Übergänge

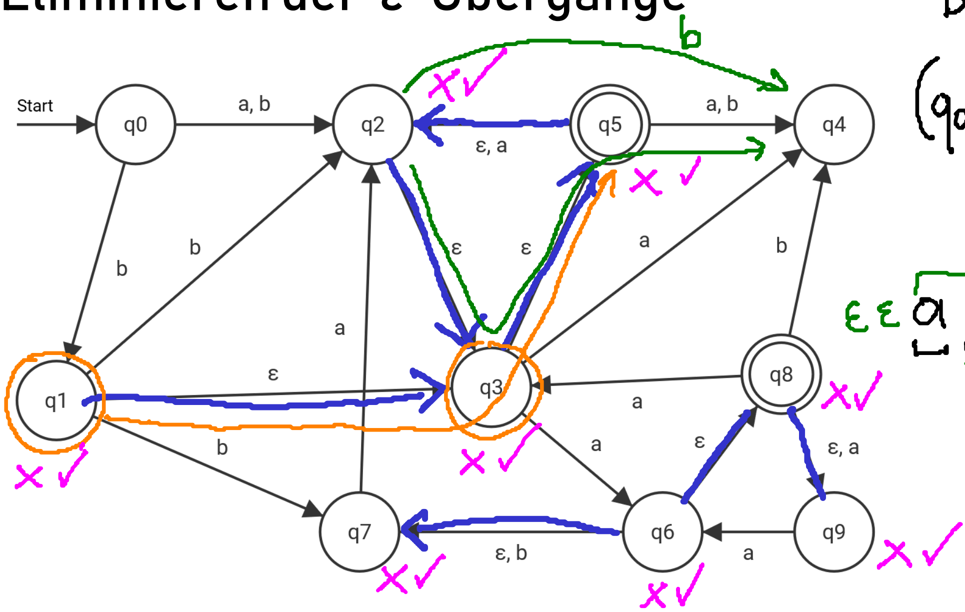








Eliminieren der ε-Übergänge



Berechnungsweg

$(q_0, a, r_1, \varepsilon, r_2, \varepsilon, r_3, b, , \varepsilon, , \varepsilon, , a, b, \varepsilon, \varepsilon, q)$

$\in F$

$\varepsilon\varepsilon\, a\, \varepsilon\varepsilon b\, \varepsilon\varepsilon a\, b\, \varepsilon\varepsilon = abab$

$q \xrightarrow[\varepsilon]{*} q'$: q' kann von q über eine Folge von (0 oder mehr) ε-Übergängen erreicht werden.

($q \xrightarrow[\varepsilon]{*} q$ gilt für alle $q \in Q$.)

① Gruppiere Folge von ε-Übergängen zusammen mit nachfolgendem Σ-Übergang zu einem einzigen Σ-Übergang:

$$\bar{\delta} := \delta \cup \{(q, x, q'') \mid x \in \Sigma, \exists q' \in Q : q \xrightarrow[\varepsilon]{*} q', (q', x, q'') \in \delta\}$$

② Ernenne Zustände, von denen ein akzeptierender Zustand über eine Folge von ε-Übergängen erreichbar ist, zu akzeptierenden Zuständen.

$$\bar{F} := F \cup \{q \mid \exists q' \in F : q \xrightarrow[\varepsilon]{*} q'\}$$

③ Lösche alle ε-Übergänge:

$$\bar{\bar{\delta}} := \{(q, x, q') \in \bar{\delta} \mid x \neq \varepsilon\}$$

$\bar{A} = (Q, \Sigma, q_0, \bar{\bar{\delta}}, \bar{F})$ ist der gesuchte NEA (ohne ε).

$L(\bar{A}) = L(A)$

Beweis:

1.) $L(\bar{A}) \subseteq L(A)$

Jeder akzeptierende Berechnungsweg $(r_0, x_1, r_1, x_2, r_2, x_3, \dots r_n)$ für $\bar{A}$ lässt sich in einen akzeptierenden Berechnungsweg für A für das gleiche Wort $x_1 x_2 x_3 \dots$ transformieren.

$(r_{i-1}, x_i, r_i) \in \delta$ ✓

$\in \bar{\delta} \setminus \delta$: Ersetze durch $\overbrace{(r_{i-1}, \varepsilon, .., \varepsilon, .., q', x_i, r_i)}^{\varepsilon\text{-Übergänge}}$

$r_n \in F$ ✓

$r_n \in \bar{F} \setminus F$ ✓ Hänge $(r_n, \varepsilon, .., \varepsilon \dots, \varepsilon, q')$ an, $q' \in F$

2.) $L(A) \subseteq L(\bar{A})$

Jeder akzeptierende Berechnungsweg $(r_0, x_1, r_1, x_2, r_2, x_3, \dots r_n)$ für A lässt sich in einen akzeptierenden Berechnungsweg für $\bar{A}$ für das gleiche Wort $x_1 x_2 x_3 \dots$ transformieren.

....