Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

$\{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$

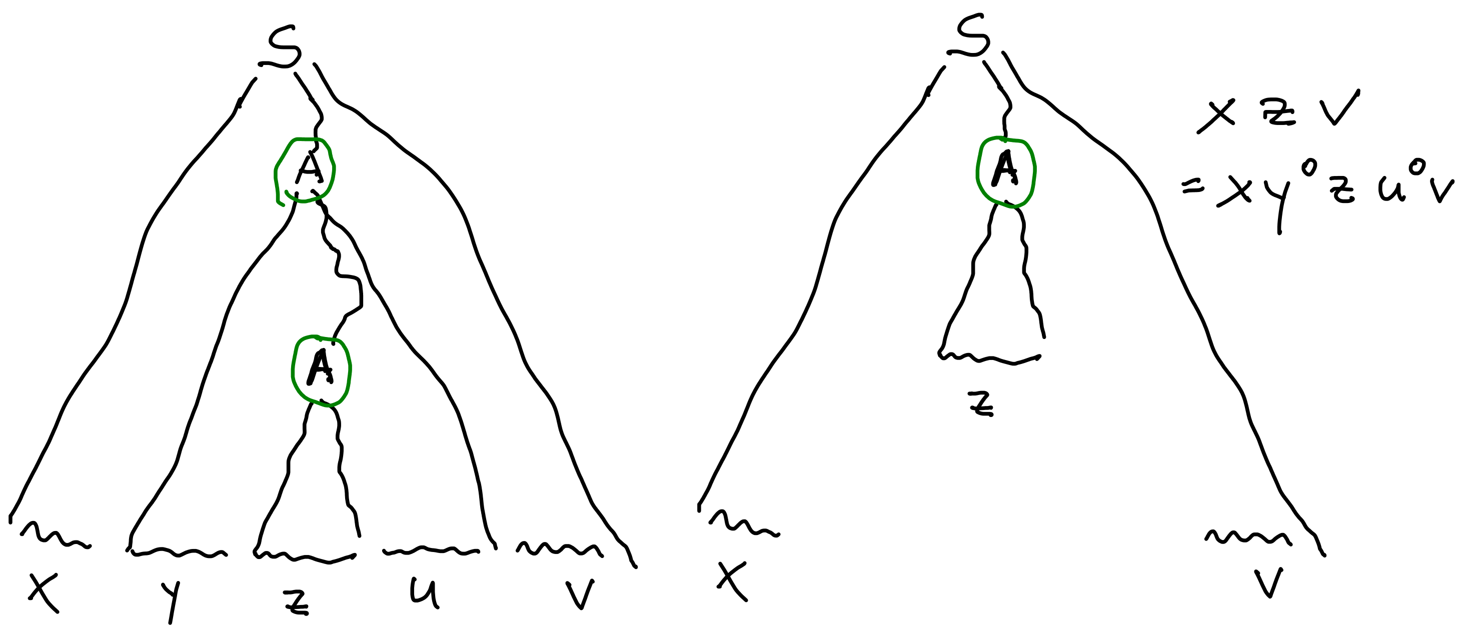
L sei eine kontextfreie Sprache.
Dann gibt es eine Zahl n mit folgender Eigenschaft:
Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ lässt sich zerlegen in $w = xyzuv$ $(x, y, z, u, v \in \Sigma^*)$ mit

1. $yu \neq \varepsilon$ (Sonst wäre die Aussage trivial.)
2. $|yzu| \leq n$
3. $\boxed{\forall k \geq 0 : xy^k z u^k v \in L}$ (pumpen)

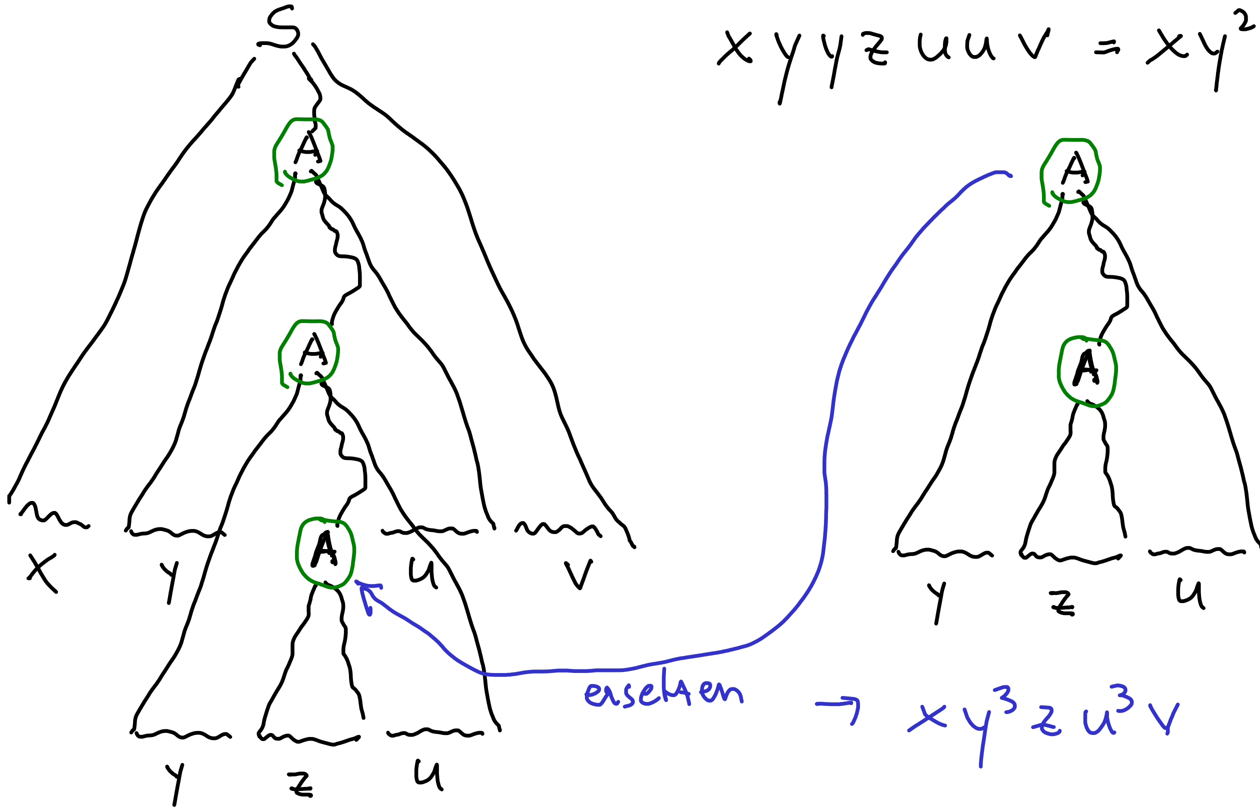
Beweisidee:

Finde eine Variable A im Ableitungsbaum, in derem Teilbaum dieselbe Variable A noch einmal vorkommt.

$\rightarrow$ Gelegenheit zum Pumpen.



$$xyyzuuv = xy^2zu^2v$$

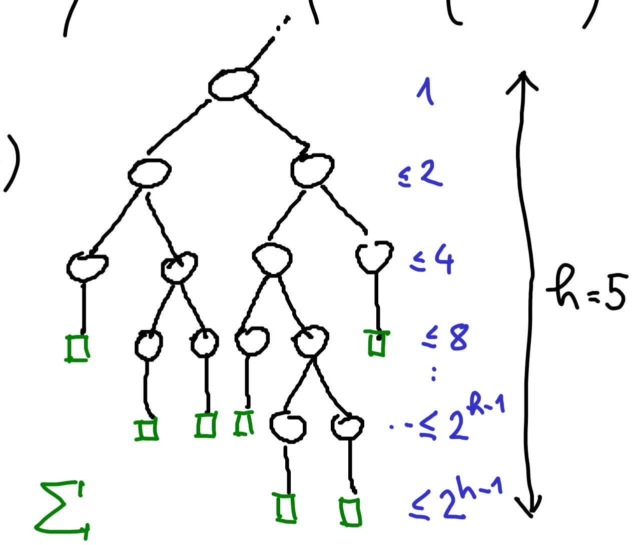


$$\rightarrow xy^3zu^3v$$

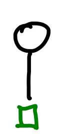
Beweis: $L = L(G)$, G in Chomsky-Normalform (CNF)

Lemma: Wenn in einem Ableitungsbaum (oder in einem Unterbaum eines Ableitungsbaums) der längste Pfad von der Wurzel zu einem Blatt die Länge h hat (d.h. h Variablen + 1 Terminalsymbol) dann hat das abgeleitete Wort w die Länge $|w| \leq 2^{h-1}$. $(h \geq 1)$

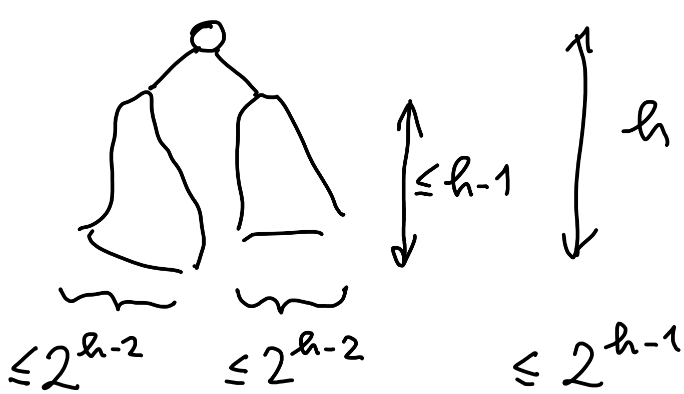
(h = Höhe des Baumes)



Beweis durch vollständige Induktion nach h:

$h = 1$: 

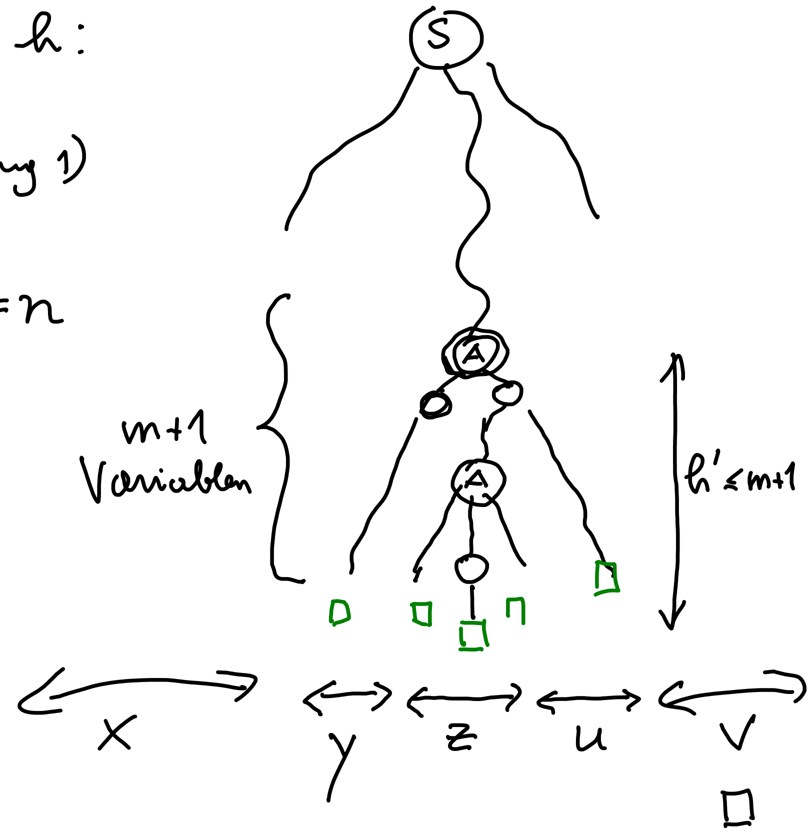
$|w| = 1 = 2^{h-1} = 2^0$

$h > 1$: 

$\square$

$m = |V| \qquad n := 2^m. \qquad |w| \geq n \overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} h \geq m+1$

Betrachte einen Pfad der Länge h:



CNF $\Rightarrow$ $yu \neq \varepsilon$ (Bedingung 1)

$|yzu| \leq 2^{h'-1} \leq 2^{m+1-1} = 2^m = n$

(Bedingung 2)