Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

L sei eine kontextfreie Sprache.
Dann gibt es eine Zahl n mit folgender Eigenschaft:
Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ lässt sich zerlegen in $w = xyzuv$ ($x, y, z, u, v \in \Sigma^*$) mit

1. $yu \neq \varepsilon$
2. $|yzu| \leq n$
3. $\boxed{\forall k \geq 0: \; xy^kzu^kv \in L}$ (pumpen)

$\{0^n \mid n \geq 0\} = 0^*$ ... regulär

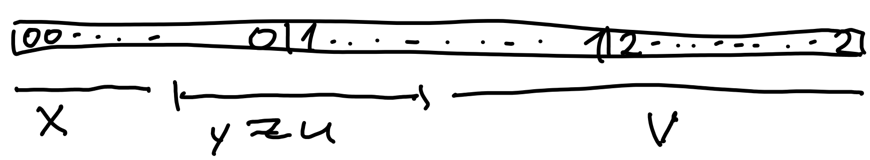
$\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ ... nicht regulär, aber kontextfrei $S \to 0S1 \mid \varepsilon$

$L = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$ ... nicht kontextfrei (aber kontextsensitiv)

indirekt: Annahme L kontextsensitiv $\underset{\text{Pumpinglemma}}{\Rightarrow} \exists n$ ....

$w = 0^n1^n2^n$ $\quad |w| = 3n \geq n$ ✓

$\Rightarrow w = x\underbrace{yzu}_{\leq n}v$



$|yzu| \leq n \Rightarrow yzu$ enthält keine 0 oder keine 2

$\Rightarrow xy^0zu^0v$ enthält genau n Nullen bzw. n Zweien

$|xy^0zu^0v| < 3n \Rightarrow xy^0zu^0v \notin L$ ↯ $\square$

$L = \{ w w^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ kontextfrei

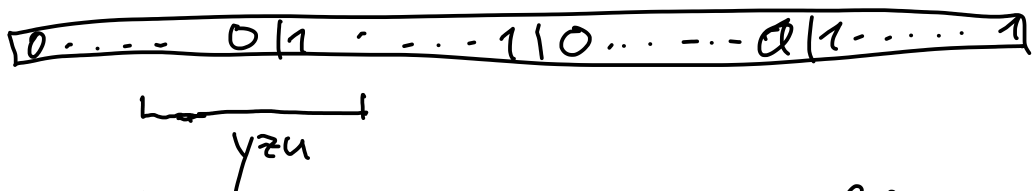
$011001100110 \in L \qquad S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$

$L = \{ w w \mid w \in \{0,1\}^* \}$ nicht kontextfrei

indirekt: Annahme L kontextsensitiv $\xRightarrow{\text{Pumpinglemma}}$ $\exists \underline{n} \ldots$

$w = 0^n 1^n 0^n 1^n \in L \qquad |w| = 4n \geq n$ ✓

$\Rightarrow w = xyzuv$



$|yzu| \leq n \Rightarrow$ yzu kann höchstens zwei aufeinanderfolgende Blöcke überlappen.

$\Rightarrow xy^0zu^0v$ macht höchstens zwei aufeinanderfolgende Blöcke kürzer und lässt die übrigen Blöcke unverändert.

$\Rightarrow xy^0zu^0v = 0^a 1^b 0^n 1^n$ oder $0^n 1^a 0^b 1^n$ oder $0^n 1^n 0^a 1^b$ $\Rightarrow \notin L$ ↯ $\square$

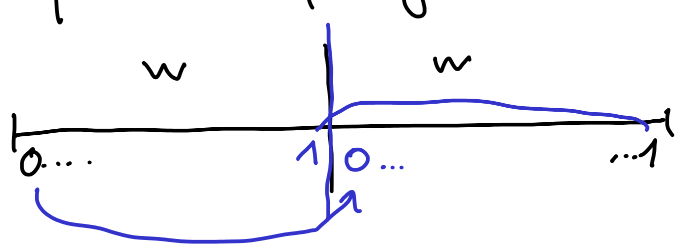
mit $0 \leq a, b \leq n \qquad a+b < 2n$

Lemma: $0^p 1^q 0^r 1^s \in L \Leftrightarrow p = r$ und $q = s$

oder $p = r = 0$ und $q + s$ gerade

oder $q = s = 0$ und $p + r$ gerade

Beweis: Fall 1: $p > 0, s > 0$

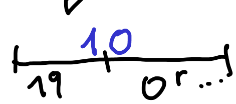


Fall 2: $p = 0$ a) $r = 0$ ✓

b) $r > 0$

$1^q 0^r 1^s$ — 1) $q = s = 0$ ✓

2) $q > 0$



$\notin L$

3) $q = 0, r > 0 \qquad \notin L$ $\square$

Fall 3: $s = 0$ analog