Kellerautomaten akzeptieren genau die kontextfreien Sprachen

Grammatik $G \to$ Kellerautomat K

Idee: Modellieren einer Linksableitung

$$\delta = \{(q_0, \varepsilon, S, q_0, AB),$$
$$(q_0, \varepsilon, A, q_0, CD),$$
$$(q_0, \varepsilon, A, q_0, CF),$$
$$(q_0, \varepsilon, B, q_0, EB),$$
$$(q_0, \varepsilon, F, q_0, AD),$$
$$(q_0, b, B, q_0, \varepsilon),$$
$$(q_0, c, C, q_0, \varepsilon),$$
$$(q_0, d, D, q_0, \varepsilon),$$
$$(q_0, b, E, q_0, \varepsilon)\},$$

G:

$S \to AB$

$A \to CD \mid CF$

$B \to b \mid EB$

$C \to c$

$D \to d$

$E \to b$

$F \to AD$

$Z_0 = S$, $\Gamma = V$, $Q = \{q_0\}$

Linksableitung:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow CFB \Rightarrow cFB \Rightarrow cADB \Rightarrow cCFDB \Rightarrow ccFDB \Rightarrow ccADDB \Rightarrow ccCDDDB \Rightarrow cccDDDB \Rightarrow cccdDDB \overset{*}{\Rightarrow} cccdddB \Rightarrow cccdddEB \Rightarrow cccdddbB \Rightarrow cccdddbb$$

$$N(K) = L(G)$$

$$(q_0, cccdddbb, S) \vdash (q_0, cccdddbb, AB) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

$\square$

Allgemein: Grammatik $G = (\Sigma, V, P, S)$ in CNF

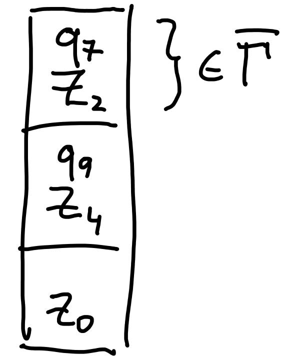
$$\delta = \{(q_0, \varepsilon, A, q_0, BC) \mid \text{Paarregeln } A \to BC \in P\}$$
$$\cup \{(q_0, a, A, q_0, \varepsilon) \mid \text{Einheitsregeln } A \to a \in P\}$$
$$\cup \{(q_0, \varepsilon, S, q_0, \varepsilon)\} \text{ falls } S \to \varepsilon \in P$$

Kellerautomat $K \to$ Grammatik G

Konstruiere einen Kellerautomaten $\bar{K}$ mit nur einem einzigen Zustand $\bar{q}$ und $N(\bar{K}) = N(K)$.

Idee: Zustand $q \in Q$ auf dem Keller merken:

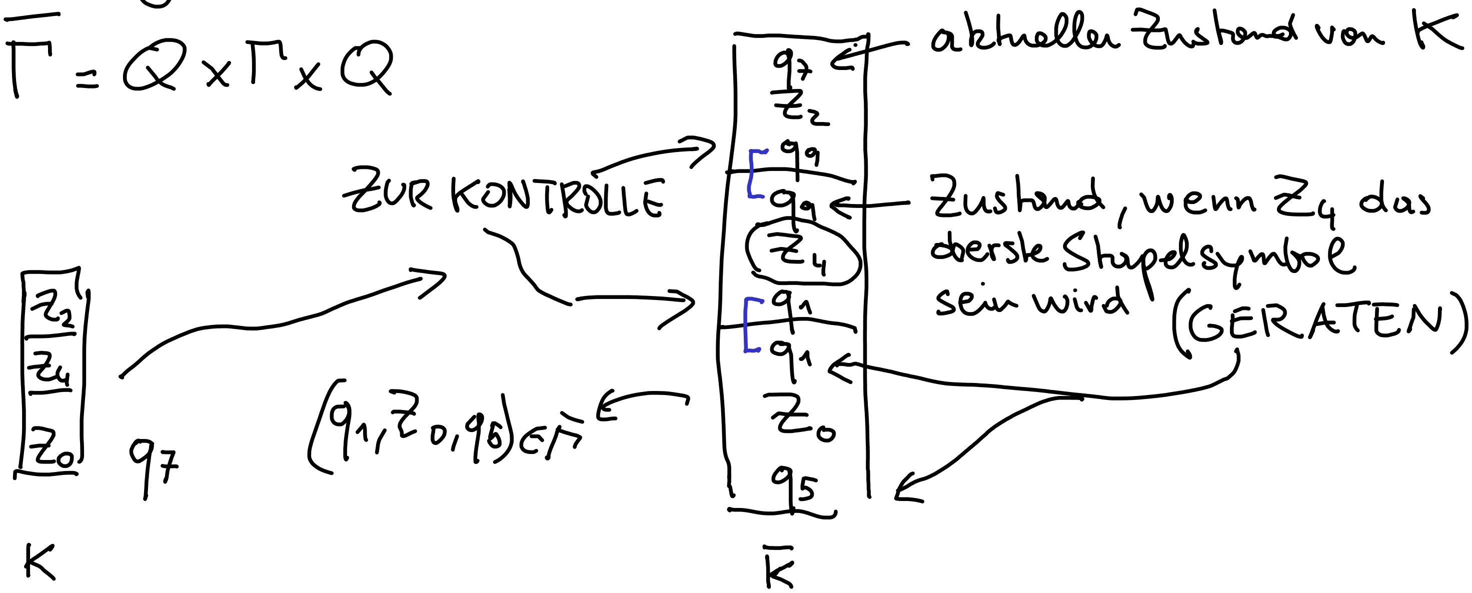
$\cancel{\bar{\Gamma} = Q \times \Gamma}$



Problem: Löschen des obersten Kellersymbols

Lösung:

$\bar{\Gamma} = Q \times \Gamma \times Q$



ZIEL:

$$(q_0, w, Z_0) \vdash_K^* (q, w', \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_k) \qquad (\gamma_i \in \Gamma)$$

$$\Longleftrightarrow$$

≥ 1 Schritte

$$(\bar{q}, w, \bar{Z}) \vdash_{\bar{K}}^{+} (\bar{q}, w', (q,\gamma_1,q_1)(q_1,\gamma_2,q_2)(q_2,\gamma_3,q_3)\cdots(q_{k-1},\gamma_k,q_k))$$

für beliebige Zustände $q_1, q_2, \dots, q_k \in Q$

$$\Rightarrow N(K) = N(\bar{K}) \qquad \square$$

Für jeden Übergang $(q, a, z, q', y_1 y_2 \cdots y_k) \in \delta \quad (k \geq 1)$

enthält $\bar{\delta}$:

$$(\bar{q}, a, (q, z, \tilde{q}), \bar{q}, (q', y_1, q_1)(q_1, y_2, q_2)(q_2, y_3, q_3) \cdots (q_{k-1}, y_k, \tilde{q}))$$

für alle $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1} \in Q$

Für jeden Übergang $(q, a, z, q', \varepsilon) \in \delta$

enthält $\bar{\delta}$:

$$(\bar{q}, a, (q, z, q'), \bar{q}, \varepsilon)$$

$\bar{\delta}$ enthält zusätzliche Anfangsübergänge:

$$(\bar{q}, \varepsilon, \bar{Z}, \bar{q}, (q_0, Z_0, q)) \quad \text{für alle } q \in Q$$

$$\bar{K} = (\Sigma, \Gamma, \{\bar{q}\}, \bar{Z}, \bar{q}, \delta) \to \text{Grammatik } G$$

$$(\bar{q}, a, z, \bar{q}, y) \in \delta \Rightarrow z \to ay \quad \in P$$

$V = \Gamma$, $S = \bar{Z}$ $\square$