Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit

Berechenbare Funktionen:

Eine Turingmaschine, die für jede Eingabe hält, berechnet eine Funktion $f: \Sigma^* \to \Gamma^*$

Bandinhalt nach dem Halten

Bandinhalt zu Beginn der Berechnung

Eine Funktion heißt berechenbar, wenn sie von einer Turingmaschine berechnet wird.

Entscheidungsprobleme: $f: \Sigma^* \to \{ja, nein\}$

Bsp: Eingabe: Eine Zahl n in Binärdarstellung

Frage: Ist n eine Primzahl?

zugehörige Sprache $L = \{ w \in \Sigma^* \mid f(w) = ja \}$

Umgekehrt: formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gegeben.

zugehöriges Entscheidungsproblem: Ist $w \in L$?

(das „Wortproblem" für L)

ENTSCHEIDUNGSPROBLEM $\approx$ (formale) SPRACHE

Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

$w \in \Sigma^*$
- → M hält in einem akzeptierenden Zustand $q \in F$ $\Rightarrow w \in L(M)$
- → M hält in einem Zustand $q \notin F$ $\left.\right\}$ $\Rightarrow w \notin L(M)$
- → M hält nicht.

Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$:=

$\{w \in \Sigma^* \mid$ M hält bei Eingabe w in einem Zustand $q \in F\}$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar***, wenn es eine Turingmaschine M gibt, die für jede Eingabe hält, mit $L(M) = L$.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv aufzählbar***, wenn es eine Turingmaschine M gibt mit $L(M) = L$.

*) andere Bezeichnung: rekursiv (auch für berechenbare Funktionen)

*) andere Bezeichnung: semi-entscheidbar

Achtung: abzählbare Menge (gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$, oder endlich)

Das **Halteproblem** für Turingmaschinen:

Eingabe: Eine Turingmaschine M mit $\Sigma = \{0,1\}$, ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Hält M bei Eingabe von w?

Entsprechende Sprache $H = \{\underbrace{\langle M \rangle w}_{\in \Sigma^* = \{0,1\}^*} \mid M \text{ hält bei Eingabe von } w\}$

$\langle M \rangle$:= geeignete Kodierung von M als Bitfolge

Simulationsprogramm für Turingmaschinen:

Eingabe: $\langle M \rangle$, $w \in \Sigma^*$

Aufgabe: Simuliere die Turingmaschine M
mit der Eingabe w

Eine Turingmaschine für diese Aufgabe heißt eine *universelle Turingmaschine* $M_U = (Q_U, \dots, F_U)$

Eingabe: $\langle M \rangle w$, $w \in \{0,1\}^*$

M_U soll

- in einem akzeptierenden Zustand $\in F_U$ halten, wenn M in einem akzeptierenden Zustand hält
- in einem Zustand $\notin F_U$ halten, wenn M in einem nicht akzeptierenden Zustand hält
- nicht halten, wenn M nicht hält.
- in einem Zustand $\notin F_U$ halten, wenn die Eingabe nicht mit einer gültigen Kodierung $\langle M \rangle$ beginnt.

Es gibt z.B. universelle Turingmaschinen mit $|\Gamma| = |Q| = 6$.

Die *universelle Sprache* $U = L(M_U) = \{\langle M \rangle w \mid w \in L(M)\}$