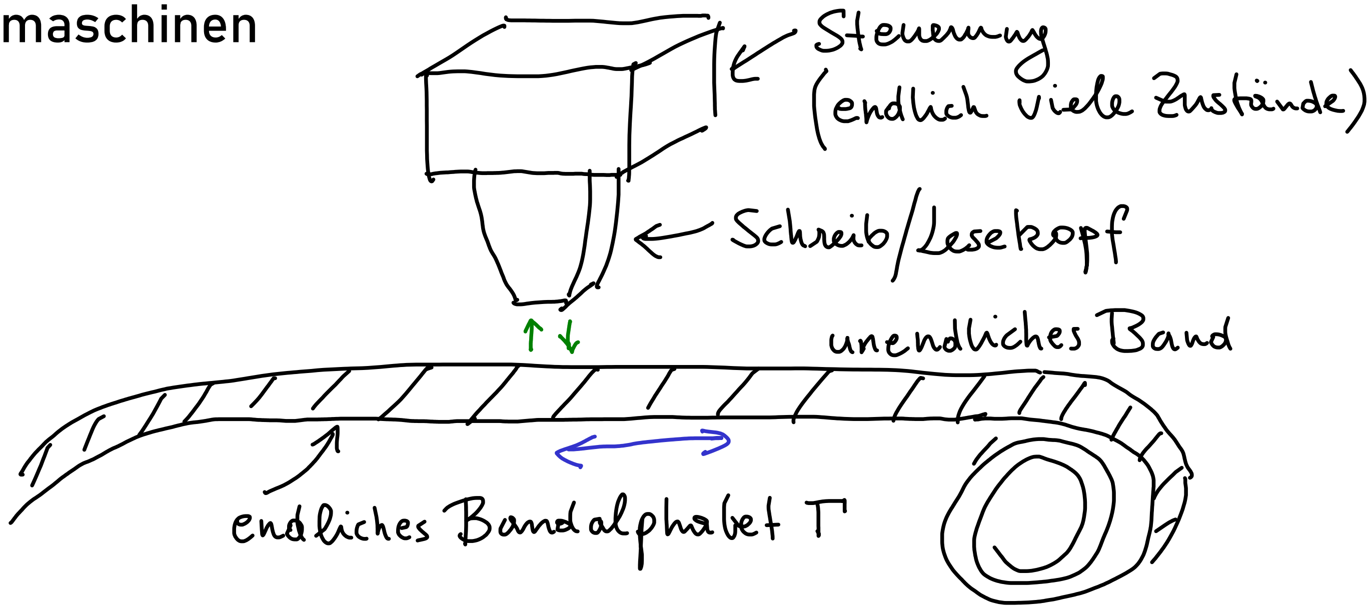
Turingmaschinen



Eingabe steht zu Beginn auf dem Band.

Turingmaschine:

- liest das aktuelle Bandsymbol z.
- kann das Symbol durch ein neues Symbol überschreiben
- kann das Band nach links oder rechts bewegen.
- kann sich endlich viele Möglichkeiten im Zustand merken.

Beispiel: Addition von Binärzahlen

$$\underbrace{\overbrace{01001101}^{x}}_{x+y}\ \#\ \underbrace{\overbrace{1101}^{y}}_{\text{unverändert.}}\ \$$$

klassisch von Hand

```
 1001101
    1101 +
 -------
   11  1
 1011010
```

- Hin- und Herfahren, Stellen markieren

$0 1 0 0 1 1 0 1 \# \bar{1}\bar{1}\bar{0}\bar{1} \$$

+1

$0 1 0 0 1 1 \bar{1}\bar{0}$

+1 r

$0 1 0 1 0 \bar{0}\bar{1}\bar{0}$

+1

$0 1 0 1 1 0 1 0 \# 1 1 0 1 \$$

Anfang:

q_0 while $Z \neq \$$:
    gehe nach rechts

q_1 while $Z \in \{\bar{1}, \bar{0}, \$\}$ — suche das rechteste nicht markierte Bit von y
    gehe nach links
  if $Z = \#$:
    springe zu Schleifenende — Alle Bits von y wurden schon addiert.
  $u := Z$ — aktuelles Bit merken in einer Variablen mit endlich vielen Möglichkeiten
  if $Z = 0$: schreibe $\bar{0}$ — Bit markieren
  else: schreibe $\bar{1}$

q_2 while $Z \neq \#$ — Suche das rechteste unmarkierte Bit von x
    gehe nach links
q_3 while $Z \in \{\bar{0}, \bar{1}, \#\}$
    gehe nach links

q_3^0 if $u = 0$
    if $Z \in \{0, B\}$: schreibe $\bar{0}$ — markiere Bit
    else: schreibe $\bar{1}$

q_3^1 if $u = 1$:
    if $Z \in \{0, B\}$: schreibe $\bar{1}$ — markiere Bit
    else: schreibe $\bar{0}$

q_6 gehe nach links — addiere 1 mit Übertrag
    while $Z = 1$:
      schreibe 0

gehe nach links

schreibe 1

Springe zu Anfang.

Schleifenende:

q_7 while $z \neq \$$:
  gehe nach rechts

q_8 while $z \neq B$:
  if $z = \bar{0}$: schreibe 0
  if $z = \bar{1}$: schreibe 1
  gehe nach links
gehe nach rechts
HALT

Rechts und links von der Eingabe ist das Band mit unendlich vielen „Leerzeichen" B (blank) beschrieben.

Formale Definition einer Turingmaschine

Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$

Bandalphabet Γ

$\delta(q, z) = (q', z', r)$

In Abhängigkeit vom aktuellen Zustand q und vom gelesenen Bandsymbol z

- geht der Automat in einen neuen Zustand q'
- schreibt er ein neues Bandsymbol z' (oder lässt das alte stehen, falls $z' = z$)
- bewegt den Kopf nach links $(r = L)$, recht $(r = R)$, garnicht $(r = N)$

$q \in Q$ spielt die Rolle des Programmzählers, und speichert gleichzeitig die Variablen, die sich die Maschine merkt.

δ	0	1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\#$	$\$$	B
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_0, \bar{0}, R)$	$(q_0, \bar{1}, R)$	$(q_0, \#, R)$	$(q_1, \$, L)$	— ← „egal"
q_1	$(q_2^0, \bar{0}, L)$	$(q_2^1, \bar{1}, L)$	$(q_1, \bar{0}, L)$	$(q_1, \bar{1}, L)$	$(q_7, \#, R)$	—	—
q_2^0	$(q_2^0, 0, L)$	$(q_2^0, 1, L)$	—	—	$(q_3^0, \#, L)$	—	—
q_3^0	$(q_0, \bar{0}, R)$	$(q_0, \bar{1}, N)$	$(q_3^0, \bar{0}, L)$	$(q_3^0, \bar{1}, L)$	—	—	$(q_0, \bar{0}, R)$
q_2^1	$(q_2^1, 0, L)$	$(q_2^1, 1, L)$	—	—	$(q_3^1, \#, L)$	—	—
q_3^1	$(q_0, \bar{1}, R)$	$(q_6, \bar{0}, L)$	$(q_3^1, \bar{0}, L)$	$(q_3^1, \bar{1}, L)$	—	—	$(q_0, \bar{1}, N)$
q_6	$(q_0, 1, N)$	$(q_6, 0, L)$	—	—	—	—	$(q_0, 1, N)$
q_7	$(q_7, 0, R)$	$(q_7, 1, R)$	$(q_7, \bar{0}, R)$	$(q_7, \bar{1}, R)$	$(q_7, \#, R)$	$(q_8, \$, L)$	—
q_8	$(q_8, 0, L)$	$(q_8, 1, L)$	$(q_8, 0, L)$	$(q_8, 1, L)$	$(q_8, \#, L)$	—	(q_F, B, R)
q_F	$(q_F, 0, N)$	$(q_F, 1, N)$	…	…	…	…	…

Wenn $\delta(q, z) = (q, z, N)$, dann hält die Turingmaschine.

Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

Q … endliche Zustandsmenge

Σ … Eingabealphabet

Γ … Bandalphabet, $\Sigma \subset \Gamma$

$B \in \Gamma - \Sigma$, Leerzeichen

δ … Übergangsfunktion $\quad \delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$

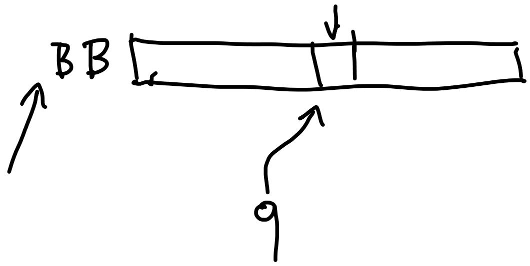
$q_0 \in Q$ … Startzustand

$F \subseteq Q$ … Menge der akzeptierenden Zustände

Annahme: Jeder Zustand in F ist ein Haltezustand.

Konfiguration

- Bandinhalt $\in \Gamma^*$
- Zustand $q \in Q$
- Position des Kopfes



Notation:

$xqy \qquad xy \in \Gamma^*$

Zustand $= q$

Kopf liest das erste Symbol von y

Überflüssige B's am Rand werden weggelassen.

Startkonfiguration: $q_0 x \quad , x \in \Sigma^*$ Eingabe

$C_1 \vdash C_2$ ... „$\vdash$" Übergang von Konfiguration C_1 zu Konfiguration C_2 in einem Schritt

$C \vdash^* C'$ Übergang von Konfiguration C zu Konfiguration C' in $\underbrace{\text{beliebig vielen}}_{\geq 0}$ Schritten.