Entscheidungsprobleme für Turingmaschinen

Gegeben: Beschreibung $\langle M \rangle$ einer T.M. M

Frugen:
a) Ist $L(M)$ endlich?
b) Ist $\overline{L(M)} = \Sigma^* - L(M)$ endlich?
c) Ist $L(M) = \emptyset$?
d) Ist $L(M)$ regulär?

trivial:
e) Ist $L(M)$ rekursiv aufzählbar? IMMER
f) Ist $L(M) \cup \overline{L(M)}$ endlich? NIE

g) Hat $L(M)$ die Eigenschaft P?

Entscheidbar:
h) Hat M mindestens 10 Zustände?
i) Hält M bei jeder Eingabe nach höchstens 100 Schritten?
Es reicht, Eingaben der Länge ≤ 101 zu testen

Eine Eigenschaft P von Sprachen heißt nichttrivial, wenn
1) Es gibt M_+ mit $L(M_+)$ hat die Eigenschaft P.
2) Es gibt M_- mit $L(M_-)$ hat die Eigenschaft P nicht.

$$\boxed{\text{SATZ von Rice: Für jede nichttriviale Eigenschaft } P \text{ ist die Frage g) unentscheidbar.}}$$

H.G.Rice 1953

LEERHEIT (Frage c)

Eingabe: Beschreibung $\langle M \rangle$ einer T.M. M

Frage: Ist $L(M) = \emptyset$?

Vorübung: $U < \text{LEERHEIT}$

Eingabe: $\langle M \rangle, w$ (Ist $w \in L(M)$?)

Reduktionsalgorithmus:

Konstruiere M' mit folgender Eigenschaft:

M akzeptiert $w \iff L(M') \neq \emptyset$

Teste LEERHEIT mit Eingabe $\langle M' \rangle$

Antwort JA ($L(M') = \emptyset$) $\rightarrow$ Antwort NEIN: $w \notin L(M)$

Antwort NEIN ($L(M') \neq \emptyset$) $\rightarrow$ JA: $w \in L(M)$

Algorithmus M' (Turingmaschine M') (hängt von w ab)

*
Eingabe x.   Simuliere M auf Eingabe w Wenn M hält und w akzeptiert, akzeptiere x

$w \in L(M) \Rightarrow L(M') = \Sigma^*$

$w \notin L(M) \Rightarrow L(M') = \emptyset$

* Turingmaschine M'

• Lösche die Eingabe (x) vom Band   • Schreibe $\langle M \rangle w$ auf das Band   • Starte eine universelle Turingmaschine M_U

(einfacher)

* Turingmaschine M'
  - Lösche die Eingabe (x) vom Band
  - Schreibe w auf das Band
  - Starte die Turingmaschine M.

Folgerung: LEERHEIT ist unentscheidbar. □

Beweis des Satzes von Rice:

Reduktion: $U <$ (Hat $L(M)$ die Eigenschaft P?)

Eingabe: $\langle M \rangle, w$ (Ist $w \in L(M)$?)

Reduktionsalgorithmus:

Konstruiere M' mit folgender Eigenschaft:

$w \in L(M) \Rightarrow L(M') = \cancel{\Sigma^*}\ L_0$ ... hat Eigenschaft P

$w \notin L(M) \Rightarrow L(M') = \emptyset$ ... hat Eigenschaft P nicht.

Fall 1 $\Rightarrow$ M_+ mit $L(M_+) =: L_0$

Eingabe $\langle M' \rangle$ für den Entscheidungsalgorithmus für P

Antwort JA ($L(M')$ hat Eig. P) $\Rightarrow$ Ausgabe JA: $w \in L(M)$.

-"- NEIN .... nicht $\Rightarrow$ NEIN: $w \notin L(M)$

Fall 2: $\emptyset$ hat Eigenschaft P

$L_0 := L(M_-)$ hat Eigenschaft P nicht.

Verwende M_- statt M_+ in der Konstruktion von M'

Vertausche JA und NEIN in der Ausgabe.

Algorithmus M' (Turingmaschine M')

Eingabe x.

Simuliere M_t mit Eingabe x

Wenn M_t hält und x akzeptiert:

Simuliere M auf Eingabe w

Wenn M hält und w akzeptiert,

akzeptiere x

hängt nicht von x ab!

$$x \in L(M') \iff x \in L(M_t) \land w \in L(M)$$

$\square$