## Sprachen, die nicht regulär sind: Das Pumping-Lemma

L sei eine reguläre Sprache. $\forall L:$
Dann gibt es eine Zahl $n$ mit folgender Eigenschaft: $\exists n:$
Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ lässt sich $\forall w:$
zerlegen in $w = xyz$ $(x, y, z \in \Sigma^*)$ mit $\exists x,y,z:$

1. $y \neq \varepsilon$ (sonst wäre die Aussage trivial)
2. $|xy| \leq n$
3. $\boxed{\forall k \geq 0: \quad xy^kz \in L}$ (pumpen) $\forall k:$

$L = \{01\}^* = \{\varepsilon, 01, 0101, 010101, \dots \}$

$w = \overbrace{0|10}^{\leq n}|101$, $x = 0$, $y = 10$, $z = 101$ $\qquad 0\underline{(10)}^k101 \in L \quad \forall k \geq 0$

$w = |01|0101$, $x = \varepsilon$, $y = 01$, $z = 0101$ $\qquad 0\underbrace{10\,10\,10\,10\,10}_{y^5}101 \in L$ („pumping")

$w = 0|1010|1$, $x = 0$, $y = 1010$, $z = 1$

Für diese Sprache können wir $n=2$ nehmen.

oder $n=3$, $n=4$, $n=1000$

$L' = 0\{01\}^* = \{0, \underbrace{0\overbrace{01}^{y}}_{\leq 3}, \underbrace{0\overbrace{01}^{y}}_{\leq 3}01, 0010101, \dots \}$ $\qquad n=3$ ✓

$L'' = 1\{01\}^* = \{1, \overline{10}1, \overline{10}101,$ $\qquad n=2$ ✓

Pumping-Lemma: notwendige Bedingung für reguläre Sprache L

$\forall L \in \Sigma^*$:

$L$ regulär $\Rightarrow \left[ \exists n : \forall w \in L : |w| \geq n \Rightarrow \exists xyz = w : \left( 1.\ y \neq \varepsilon \right.\right.$
$\wedge\ 2.\ |xy| \leq n$
$\left.\left. \wedge\ 3.\ \forall k \geq 0 : xy^k z \in L \right) \right]$

$A \Rightarrow B$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$\Big[ \forall n : \exists w \in L : |w| \geq n \wedge \forall$ Zerlegungen $w = xyz$:

$\underbrace{\left( y = \varepsilon \vee |xy| > n \vee \exists k \geq 0 : xy^k z \notin L \right)}_{y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq n \Rightarrow \exists k \geq 0 : xy^k z \notin L}\Big)\Big]$

$\neg B$

$\Rightarrow$ $L$ ist nicht regulär

> Wenn $L$ für jedes $n$ ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ enthält, das nicht in den ersten $n$ Stellen gepumpt werden kann*, dann ist $L$ nicht regulär.

* Für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leq n$:
$\exists k \geq 0 : xy^k z \notin L$.

---

Beispiel: $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält gleich viele Nullen wie Einsen $\}$

$w = 011\overset{\times}{\overbrace{000}}\underset{\checkmark}{\underbrace{0111}}10 \in L$ [$y \in L$, damit wir mit $y$ pumpen können]

$w = 0^n 1^n$ hat unter den ersten $n$ Stellen keine Pumpmöglichkeit.

Für jedes $n$ wählen wir das Wort $w = 0^n 1^n \in L$ ✓, $|w| = 2n \geq n$ ✓

Es sei $w = xyz$ eine Zerlegung mit $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq n$

$\Rightarrow xy \in 0^*$, $y = 0^i$, $i \geq 1$ $\quad xy^0 z$ enthält $n-i$ Nullen und $n$ Einsen : $xy^0 z \notin L$

$L$ erfüllt die Schlussfolgerung des Pumping-Lemmas nicht. $\Rightarrow L$ ist nicht regulär.

$L^{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ nicht regulär: Beweis wie oben.

$L^P = \{0^p \mid p \text{ ist Primzahl}\} = \{00, 000, 00000, \ldots\}$ nicht regulär

n gegeben: $w = 0^p \in L, p \geq n$

$w = xyz \quad y = 0^i \quad i \geq 1$

$xy^kz = 0^{p-i}, 0^p, 0^{p+i}, 0^{p+2i}, 0^{p+3i}, \ldots$ betrachte die Längen mod $i+1$

$k = i+1+p \qquad 0^{p+i(i+1+p)} = 0^{p+ip+i(i+1)} = 0^{p(i+1)+i(i+1)}$

$= 0^{\underbrace{(p+i)(i+1)}} \notin \mathbb{P} \qquad \in L^P$

---

Beweis des Pumping lemmas.

$A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ sei ein NEA für $L$

$n := |Q|$

$w \in L = L(A) \qquad |w| \geq n \qquad w = x_1 x_2 \ldots x_m, \; m \geq n$

$$(\overbrace{r_0, x_1, r_1, x_2, \ldots}^{x}\, r_i\, \overbrace{x_{i+1} \cdots x_j}^{y}\, r_j\, \overbrace{\ldots x_n, r_n, \ldots x_m}^{z}, r_m)$$

$r_0 = q_0$, $r_m \in F$

$r_i = r_j$

Es muss in der Zustandsfolge $r_0, r_1, \ldots, r_n$ zwei gleiche Zustände geben, sagen wir $r_i = r_j$ $(0 \leq i < j \leq n)$

Das Stück zwischen $r_i$ und $r_j$ kann beliebig oft durchlaufen werden ($k$-mal, $k \geq 0$) $\Rightarrow$ zulässiger Berechnungsweg für $xy^kz$.

$x = x_1 \ldots x_i \quad y = x_{i+1} \cdots x_j \quad z = x_{j+1} \ldots x_m \quad |xy| = j \leq n$

$y \neq \varepsilon$ □