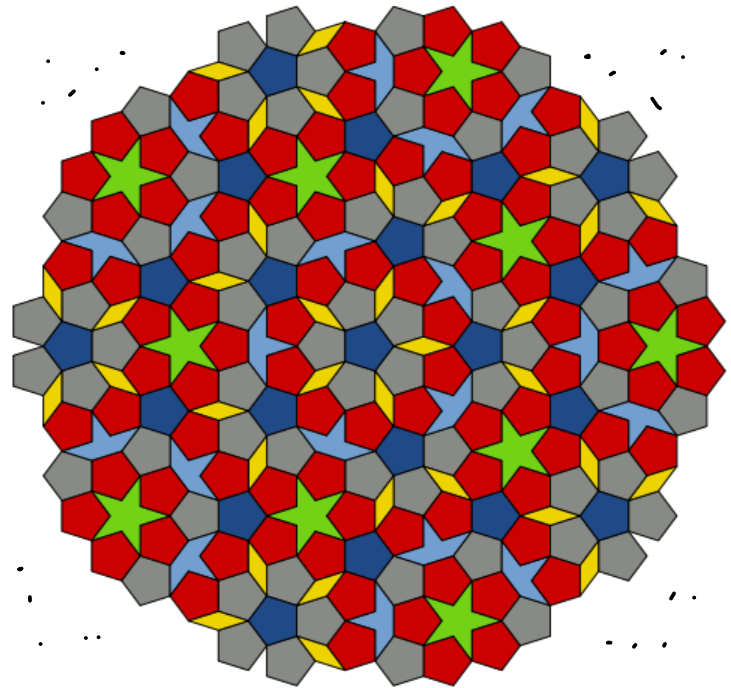
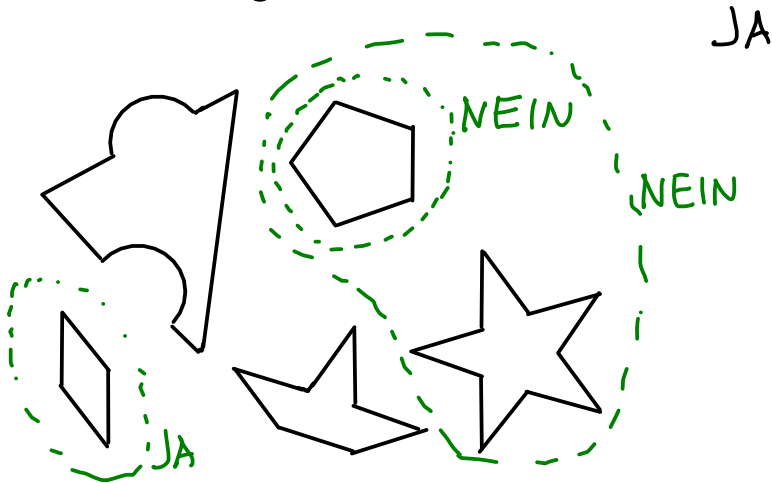


Weitere unentscheidbare Probleme

Pflasterung der Ebene



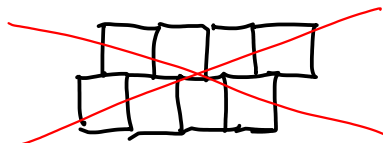
Gegeben: Eine Menge von Pflastersteinen. *WIE gegeben?*

Frage: lässt sich damit die ganze Ebene überdeckungsfrei ausfüllen? (Pflasterung, Parkettierung, engl. tiling)

Wang-Kacheln:

Quadratische Pflastersteine, deren Seiten beschriftet / gefärbt sind

- Die Kacheln dürfen nicht gedreht werden.
- Pflasterung Seite an Seite!



- Aneinander liegende Seiten müssen gleich beschriftet / gefärbt sein:

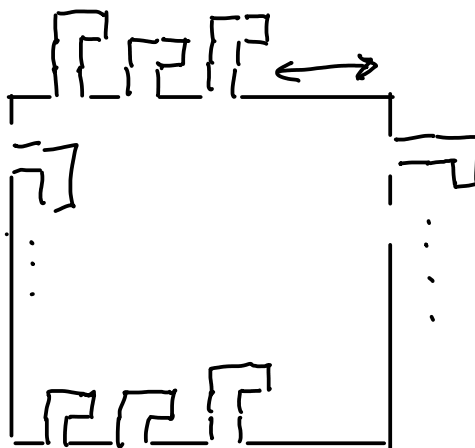
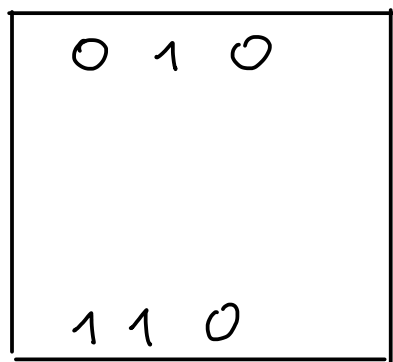


nicht erlaubt.

Eingabe in Turingmaschine über einem endlichen Alphabet. ✓

Wang-Kacheln auf rein geometrische Kachelung zurück führen

- Annahmen: • Beschriftungen $\in \{0, 1\}^2$
- Horizontale und vertikale Kanten tragen unterschiedliche Beschriftungen



Satz: Das Pflasterungsproblem für Wang-Kacheln ist unentscheidbar. (Robert Berger, 1964)

Satz: Das folgende Problem ist unentscheidbar.

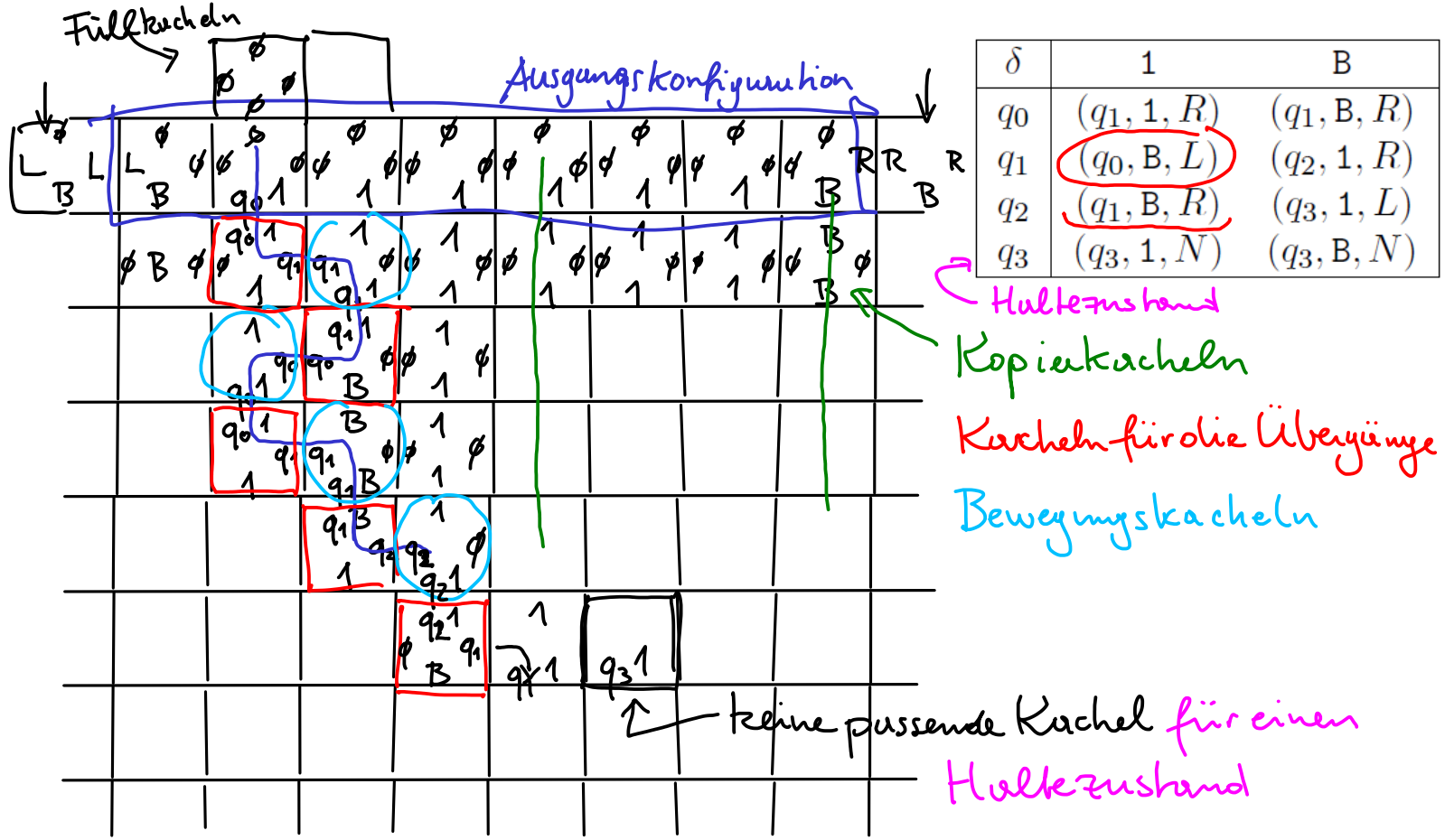
Gegeben: Eine Menge von Wang-Kacheln und eine Ausgangskonfiguration mit endlich vielen Kacheln.



Frage: Lässt sich diese Konfiguration zu einer Pflasterung der ganzen Ebene fortsetzen?

(Hao Wang, 1961)

Beweisidee: Modelliere die Berechnung einer Turingmaschine



Halteproblem \leq Wang-Kachelung mit Ausgangskonfiguration

Eingabe: $\langle M \rangle$, Eingabe w

Aus $\langle M \rangle$ erzeuge eine Menge von Wangkacheln

Aus w erzeuge Ausgangskonfiguration

Kachelung existiert $\Leftrightarrow M$ hält nicht auf Eingabe w

Für ≤ 10 Kacheln oder ≤ 3 Farben entscheidet folgender Algorithmus das ursprüngliche Kachelungsproblem ohne Ausgangskonfiguration.

Für $n=1, 2, 3, \dots$

Probiere alle Kachelungen des $n \times n$ -Quadrats

Wenn es keine gültige Kachelung gibt. \rightarrow NEIN

Wenn es eine gültige Kachelung gibt, wo am linken Rand die gleiche Beschriftung wie am rechten Rand steht, und unten wie oben \rightarrow JA

