# Die Nerode-Relation - der Minimalautomat

**Def:** $L \subseteq \Sigma^*$ sei eine Sprache:

$w_1, w_2 \in \Sigma^*$ heißen <u>Nerode-äquivalent</u> bezüglich $L$

$$w_1 \sim_L w_2 \Leftrightarrow \left(\forall x \in \Sigma^* : \; w_1 x \in L \Leftrightarrow w_2 x \in L\right)$$

**Bsp:** $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält gleich viele Nullen und Einsen} \}$

$010 \not\sim_L 011 \qquad x = 0 \qquad 0100 \notin L, \quad 0110 \in L$

$11111000 \sim_L 111000111 \sim_L 0011111$

$w_1 \sim_L w_2 \Leftrightarrow$ #1 − #0 sind bei beiden Wörtern gleich.

**Bemerkung** (Aufgabe 24): A sei ein DEA:

$$\delta^*(q_0, w_1) = \delta^*(q_0, w_2) \Rightarrow w_1 \sim_{L(A)} w_2$$

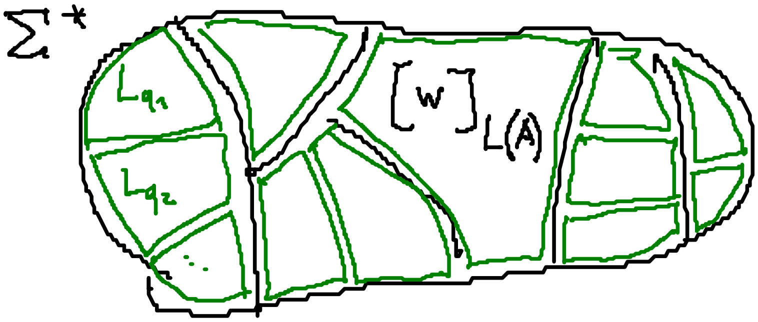
$\sim_L$ ist eine <u>Äquivalenzrelation</u> (reflexiv ✓, symmetrisch ✓, <u>transitiv</u> ✓)

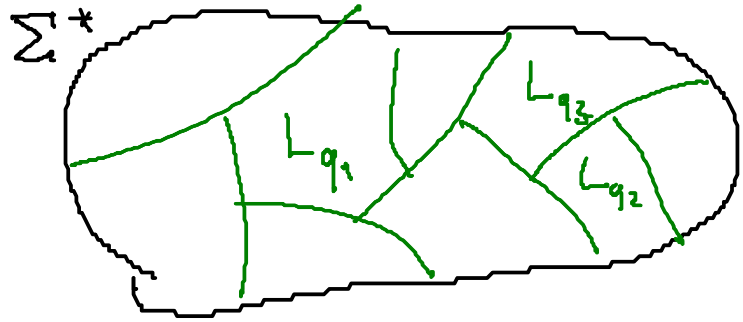
$$w_1 \sim_L w_2 \wedge w_2 \sim_L w_3 \Rightarrow w_1 \sim_L w_3 \qquad ✓$$

$\sim_L$ zerlegt $\Sigma^*$ in Äquivalenzklassen (Nerode-Klassen)

$$[w]_L := \{ x \in \Sigma^* \mid x \sim_L w \}$$

$$\left[ \begin{array}{l} w_1 \sim_L w_2 \Leftrightarrow w_1 \text{ und } w_2 \text{ gehören zur gleichen Äquivalenzklasse} \\ \quad \Leftrightarrow [w_1]_L = [w_2]_L \Leftrightarrow w_1 \in [w_2]_L \Leftrightarrow w_2 \in [w_1] \end{array} \right]$$




DEA $A = (\{q_1, q_2, \dots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$L_q = \{ w \in \Sigma \mid \delta^*(q_0, w) = q \}$, $\Sigma^* = L_{q_1} \dot\cup L_{q_2} \dot\cup \dots \dot\cup L_{q_n}$

$L_q \cap L_{q'} = \emptyset$ für $q \neq q'$. $L_q$ kann auch leer sein.

<u>Bemerkung</u> (Aufgabe 24): $\delta^*(q_0, w_1) = \delta^*(q_0, w_2) \Rightarrow w_1 \sim_{L(A)} w_2$

Wenn $w_1$ und $w_2$ in einer gemeinsamen Klasse $L_q$ liegen $\Rightarrow$
dann gehören $w_1$ und $w_2$ zu gleichen Nerode-Klasse: $[w_1]_L = [w_2]_L$

Jede Nerode-Klasse $[w]$ besteht aus einer oder mehreren Klassen $L_q$: <u>Verfeinerung</u> der Nerode-Klassen

Folgerung: Anzahl der Nerode-Klassen $\leq |Q|$

Folgerung: Für eine reguläre Sprache $L$ muss die Anzahl der Nerode-Klassen endlich sein.

Bsp. $L = \{ w \in \{s, t\}^* \mid w$ enthält gleich viele $s$ und $t \}$

$L_i = \{ w \in \{s, t\}^* \mid \#s - \#t = i \}$ $i \in \mathbb{Z}$ ... Nerode-Klassen

$\Sigma^* = \dots \cup L_{-2} \cup L_{-1} \cup L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \dots$

unendlich viele $\Rightarrow$ $L$ nicht regulär.

Satz von Myhill-Nerode:

Eine Sprache $L$ ist genau dann regulär, wenn es endlich viele Nerode-Klassen gibt.

$L = \{ w \in \{s,t\}^* \mid$ neben jedem Buchstaben in $w$ steht (mindestens) ein gleicher $\}$

$ss|tt|ss$, $\quad \overbrace{sss|tt}^{w_1}\,\overbrace{\underbrace{ttt}_{\geq 2}|ss|ttt}^{x} \in L$, $\qquad sss|\underline{t}|sss \notin L$, $\varepsilon \in L$

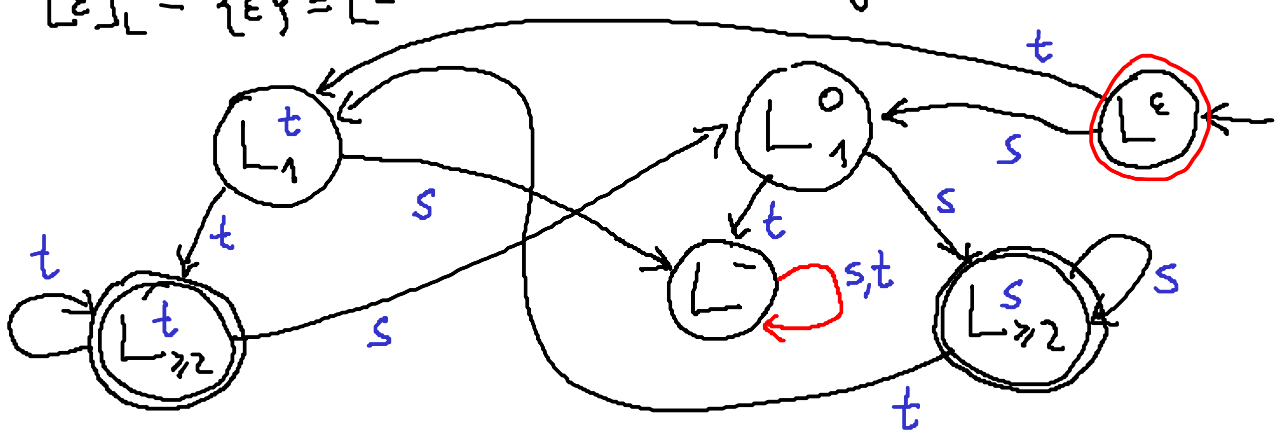
$L = \Sigma^* - \Sigma^*\{0\underline{1}0, 1\underline{0}1\}\Sigma^* - \{\underline{s}t, \underline{t}s\}\Sigma^* - \Sigma^*\{s\underline{t}, t\underline{s}\} - \{s,t\}$ regulär

$[w_1]_L = L^t_{\geq 2} = L \cap \Sigma^* t$, $\quad [ssst]_L = L^t_1 = \{ w \mid wt \in L \}$,

$[ss]_L = L^s_{\geq 2} = L \cap \Sigma^* s$, $\quad [tts]_L = L^s_1 = \{ w \mid ws \in L \}$,

$[ssts]_L = L^- = \{ w \mid$ neben einem Buchstaben außer dem letzten steht kein gleicher Buchstabe $\}$

$[\varepsilon]_L = \{\varepsilon\} = L^\varepsilon$



$Q = \{ L^t_{\geq 2}, L^s_{\geq 2}, L^t_1, L^s_1, L^\varepsilon, L^- \}$

---

Bestimmung der Nerode-Klassen:

> Was muss man sich von einem Anfangsstück $w$ merken, damit man für jede Fortsetzung $wx$ entscheiden kann, ob $wx \in L$?

.... die gleiche Frage wie beim Entwurf eines DEA

Allgemeine Konstruktion eines DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

$$Q = \{ [w]_L \mid w \in \Sigma^* \}$$

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q \qquad \delta([w]_L, a) = [wa]_L$$

Zu zeigen: $\delta$ ist durch diese Definition <u>wohldefiniert</u>:

Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten $w$ ab:

zu zeigen: $[w]_L = [w']_L \Rightarrow [wa]_L = [w'a]_L$

LEMMA 1: $\boxed{\forall w, w' \in \Sigma^*, a \in \Sigma : w \sim_L w' \Rightarrow wa \sim_L w'a}$

$q_0 = [\varepsilon]_L \qquad F = \{ [w]_L \mid w \in L \} = \{ [w]_L \mid [w]_L \subseteq L \}$

Korrektheit: $L(A) = L$

LEMMA 2: $\boxed{\delta^*(q_0, w) = [w]_L}$

$w \in L(A) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, w) \in F \Leftrightarrow [w]_L \in F \Leftrightarrow w \in L$

$\Rightarrow L(A) = L$ $\square$

---

Beweis von Lemma 2 durch vollständige Induktion nach $|w|$:

1. $\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0 = [\varepsilon]_L$
2. $\delta^*(q_0, w) = [w]_L \overset{!}{\Rightarrow} \delta^*(q_0, wa) = [wa]_L$

$\underline{\delta^*(q_0, wa)} = \delta(\underbrace{\delta^*(q_0, w)}_{\text{I.A.}}, a) = \delta([w]_L, a) = \underline{[wa]_L}$ $\square$

---

Beweis von Lemma 1 (Wohldefiniertheit von $\delta$):

LEMMA 1: $\boxed{\forall w, w' \in \Sigma^*, a \in \Sigma : w \sim_L w' \Rightarrow wa \sim_L w'a}$

Voraussetzung: $\forall x \in \Sigma^* : \quad wx \in L \Leftrightarrow w'x \in L$

zu zeigen: $\forall y \in \Sigma^* : \quad w\underline{ay} \in L \overset{!}{\Leftrightarrow} w'\underline{ay} \in L$

Setze $x = ay$ und wende die Voraussetzung für $x = ay$ an. $\square$

Satz von Myhill-Nerode:

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn es endlich viele Nerode-Klassen gibt.

Beweis: „⇒" ✓ „⇐" (Konstruktion des DEA aus den Nerode-Klassen) ✓

- Der aus den Nerode-Klassen von L konstruierte Automat ist der DEA mit der kleinstmöglichen Anzahl von Zuständen für L.
- Dieser Automat ist bis auf Umbenennung der Zustände („bis auf Isomorphie") eindeutig bestimmt, und heißt <u>der Minimalautomat</u> von L.