Minimierung von Automaten

Gegeben: DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Gesucht: der Minimalautomat $\hat{A}$ für $L(A)$

1. überflüssige Zustände weglassen
2. „äquivalente" Zustände zusammenfassen.

1. Zustände, die von q_0 nicht erreichbar sind, können weggelassen werden.

2. Zwei Zustände q, q' in einem DEA A sind äquivalent:

$$q \sim_A q' \Leftrightarrow \left(\forall w \in \Sigma^*: \delta^*(q,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q',w) \in F \right)$$

LEMMA 3: $\forall q,q' \in Q \ \forall a \in \Sigma: q \sim_A q' \Rightarrow \delta(q,a) \sim_A \delta(q',a)$

Beweis:

Voraussetzung: $\forall x \in \Sigma^*: \quad \delta^*(q,x) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q',x) \in F$

zu zeigen: $\forall y \in \Sigma^*: \quad \underbrace{\delta^*(\delta(q,a),y)}_{} \in F \Leftrightarrow \delta^*(\delta(q',a),y) \in F$

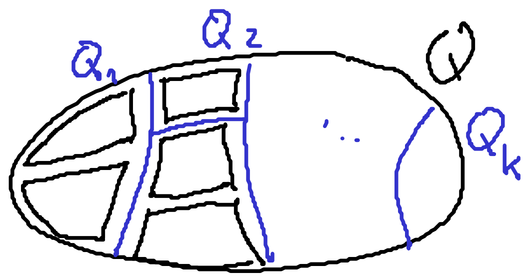
$$\delta^*(q, ay) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q', ay) \in F$$

Setze $x := ay$ $\square$

Verfeinerungsalgorithmus:

<u>Idee</u>: Verwalte eine Zerlegung $Q = Q_1 \dot\cup Q_2 \dot\cup \dots \dot\cup Q_k$ mit folgender Eigenschaft:

$$q \sim_A q' \Rightarrow q \text{ und } q' \text{ sind in derselben Klasse}$$



Fange mit einer groben Zerlegung an, und verfeinere die Zerlegung, bis die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt sind:

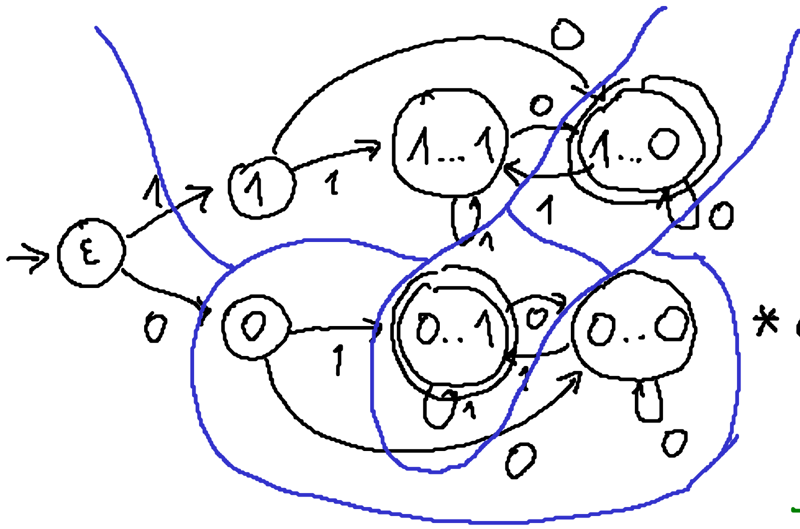
(1) $q \in F, q' \notin F \Rightarrow q$ und q' sind in verschiedenen Klassen

(2) $\forall a \in \Sigma$: q, q' in derselben Klasse
$\Rightarrow \delta(q,a), \delta(q',a)$ in derselben Klasse

(2') $\delta(q,a), \delta(q',a)$ in verschiedenen Klassen
$\Rightarrow q, q'$ in verschiedenen Klassen

<u>Bsp.</u> $L(A) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid$ Das erste und das letzte Zeichen von w sind verschieden $\}$

- Was muss sich der Automat merken?



$$Q = \underbrace{\{1..0,\ 0..1\}}_{F} \cup \underbrace{\{\varepsilon, 1, 0, 1..1, 0..0\}}_{Q-F}$$

$$= Q_1 \cup Q_2$$

* Gibt es q, q' in derselben Klasse, $a \in \Sigma$ mit $\delta(q,a), \delta(q',a)$ in versch. Klassen?

$q = 1$ $q' = 0..0$ $a = 1$ $q, q' \in Q_2$

Spalte Q_2 auf, nach der Klasse von $\delta(q,1)$:

$$Q_2 = \{\varepsilon, 1, 1..1\} \cup \{0, 0..0\}$$

$q \in Q_2$	$\delta(q,1)$	$\in Q_p$
ε	1	$\in Q_2$
$q = 1$	$1..1$	$\in Q_2$
0	$0..1$	$\in Q_1$
$1..1$	$1..1$	Q_2
$q' = 0..0$	$0..1$	$\in Q_1$

Nach diesem Kriterium wird zerlegt.

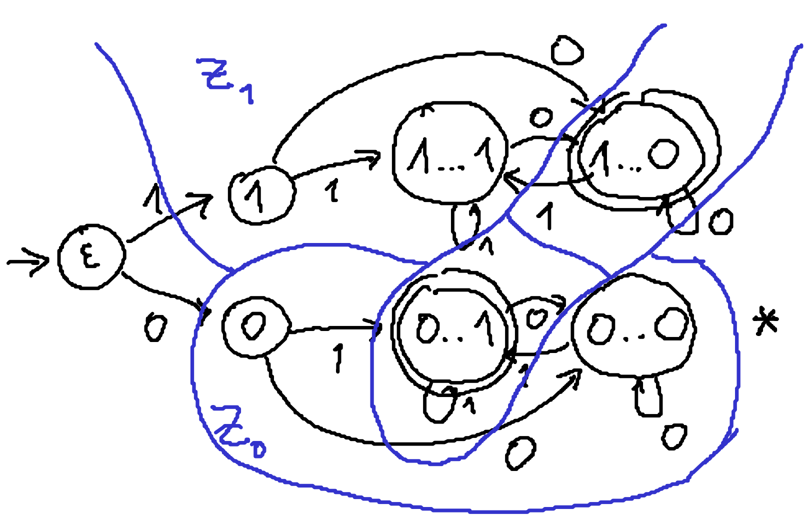
$$Q = \underbrace{\{1..0, 0..1\}}_{Q_3} \cup \underbrace{\{\varepsilon, 1, 1..1\}}_{Q_4} \cup \underbrace{\{0, 0..0\}}_{Q_5}$$

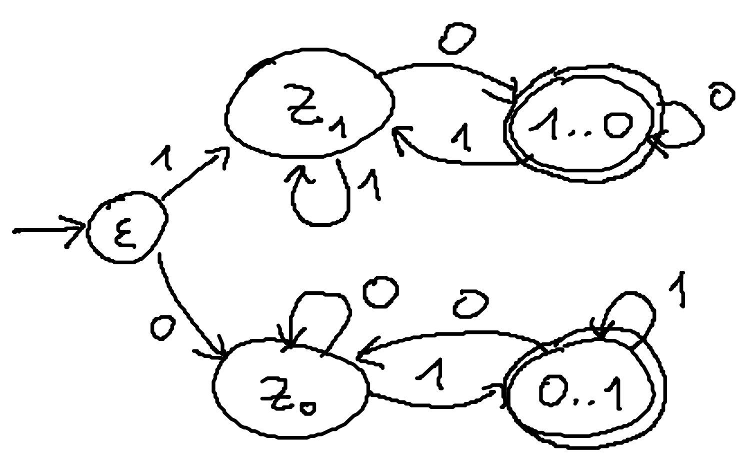
$q = \varepsilon$, $q' = 1$, $a = 0$ $q, q' \in Q_4$

$q \in Q_4$	$\delta(q,0)$	$\in Q_p$
$\varepsilon = q$	0	$\in Q_5$
$q' = 1$	$1..0$	$\in Q_3$
$1..1$	$1..0$	$\in Q_3$

$$Q = \underbrace{\{1..0, 0..1\}}_{Q_6} \cup \underbrace{\{\varepsilon\}}_{Q_7} \cup \underbrace{\{1, 1..1\}}_{Q_8} \cup \underbrace{\{0, 0..0\}}_{Q_9}$$

$$Q = \{1..0\} \cup \{0..1\} \cup \underbrace{\{\varepsilon\}} \cup \underbrace{\{1, 1..1\}} \cup \underbrace{\{0, 0..0\}}$$





Verfeinerungsalgorithmus:

Beginne mit der Zerlegung $Q = F \cup (Q - F)$ in zwei Klassen.

<u>Schleife</u>: $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$ sei die aktuelle Zerlegung.

* Gibt es $q, q' \in Q_i$ in derselben Klasse, $a \in \Sigma$ mit $\delta(q,a) \in Q_j$, $\delta(q',a) \in Q_\ell$ in verschiedenen Klassen $j \neq \ell$?

Wenn ja, spalte $Q_i = \underbrace{Q_{i1} \cup Q_{i2} \cup \dots \cup Q_{ik}}$ auf

mindestens zwei nichtleere Klassen

$$Q_{ip} = \{ q \in Q_i \mid \delta(q,a) \in Q_p \}$$

$p = 1, \dots, k$

(1) und (2) erfüllt.

<u>Konstruktion des Minimalautomaten</u>: $[q]$ = die Klasse Q_i mit $q \in Q_i$

$$\hat{Q} = \{ [q] \mid q \in Q \} = \{ Q_1, Q_2, \dots, Q_k \}, \quad \hat{\delta}([q], a) = [\delta(q,a)], \quad \hat{q}_0 = [q_0],$$

$$\hat{F} = \{ [q] \mid q \in F \} = \{ [q] \mid [q] \in F \}.$$

- $\hat{\delta}$ wohldefiniert.
- $L(\hat{A}) = L(A)$
- minimal
- Laufzeit

- $\hat{\delta}$ wohldefiniert. $\hat{\delta}([q],a) = [\delta(q,a)]$

(2)

$q, q' \in Q_i \implies \delta(q,a)$ und $\delta(q',a)$ gehören zur gleichen Klasse.

- $L(\hat{A}) = L(A)$ ✓ 1. $\hat{\delta}^*([q_0], x) = [\delta^*(q_0, x)]$

2. $\underbrace{\hat{\delta}^*([q_0], x)}_{[\delta^*(q_0,x)]} \in \hat{F} \iff \delta^*(q_0, x) \in F$

$[\delta^*(q_0,x)] \in \hat{F}$ gemäß Definition von $\hat{F}$

Beweis von 1. durch vollständige Induktion nach $|x|$:

Induktionsbasis: $x = \varepsilon$: $\underbrace{\hat{\delta}^*([q_0], \varepsilon)}_{[q_0]} \overset{!}{=} [\underbrace{\delta^*(q_0, \varepsilon)}_{q_0}]$

$[q_0] = [\ q_0\ ]$ ✓

Induktionsschritt von x nach xa $(x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma)$

Induktionsannahme: $\hat{\delta}^*([q_0], x) = [\delta^*(q_0, x)]$

Induktionsbehauptung: $\hat{\delta}^*([q_0], xa) \overset{!}{=} [\delta^*(q_0, xa)]$

$$L.S. = \hat{\delta}\big(\underbrace{\hat{\delta}^*([q_0], x)}, a\big) \overset{I.A.}{=} \hat{\delta}\big([\delta^*(q_0, x)], a\big)$$

$$= [\delta(\delta^*(q_0, x), a)] = [\delta^*(q_0, xa)] = R.S. \quad \square$$

- $q \sim_A q' \Rightarrow q$ und q' sind in derselben Klasse

Der Algorithmus erhält folgende Invariante aufrecht:

(*) Wenn q und q' in verschiedenen Klassen sind,
dann gibt es ein $w \in \Sigma^*$ mit $\delta^*(q, w) \in F$ und $\delta^*(q', w) \notin F$,
„w unterscheidet zwischen q und q'." oder umgekehrt.

Zu Beginn: $Q_1 = F,\ Q_2 = Q - F$: $w = \varepsilon$

Verfeinerung: q, q' kommen in verschiedene Klassen, weil
$\exists a \in \Sigma: \underbrace{\delta(q, a)}$ und $\underbrace{\delta(q', a)}$ schon in verschiedenen Klassen sind.

I.V. $\exists w \in \Sigma^*$:

$\delta^*(\delta(q,a), w) \in F,\ \delta^*(\delta(q',a), w) \notin F$, oder umgekehrt

$\delta^*(q, \underline{aw}) \in F,\ \delta^*(q', \underline{aw}) \notin F$ —"—

Wir können q und q' mit dem Wort aw „unterscheiden". $\square$

- minimal ✓

1. Ordne jeder Klasse $Q_i \in \hat{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ ein Wort w_i zu.
2. Zeige, dass $w_i \not\sim_{L(A)} w_j$ für $i \neq j$
3. Es gibt mindestens $k = |\hat{Q}|$ Nerode-Klassen $\Rightarrow \hat{A}$ minimal.

---

1. Finde w_i : $\delta^*(q_0, w_i) \in Q_i$ (keine unerreichbaren Zustände!)

2. Finde $x \in \Sigma^*$: $w_i x \in L(A)$ und $w_j x \notin L(A)$, oder umgekehrt.

$$\left.\begin{array}{l} \delta^*(q_0, w_i) = q \in Q_i \\ \delta(q_0, w_j) = q' \in Q_j \end{array}\right\} (\ast) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta^*(q, w) \in F \\ \delta^*(q', w) \notin F \end{array}\right\} \text{ oder umgekehrt.}$$

$$\delta^*(q, w) = \delta^*(\delta^*(q_0, w_i), w) = \delta^*(q_0, w_i w) \in F \Rightarrow w_i w \in L(A)$$
$$\delta^*(q, w) = \delta^*(\delta^*(q_0, w_j), w) = \delta^*(q_0, w_j w) \notin F \Rightarrow w_j w \notin L(A)$$

(oder umgekehrt) $\square$

- Laufzeit
  - höchstens $n-2$ Schleifendurchläufe $(n = |Q|)$
    (In jedem Durchlauf steigt die Anzahl der Klassen um ≥ 1)
  - Implementierung:
    - Annahme: Nummerierte Liste $q_1, q_2, \dots, q_n$ der Zustände
    - Übergangsfunktion $\delta(q_i, a)$
    - Klassenzerlegung $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$
      - für jedes Q_i eine Liste der Zustände $q \in Q_i$ $(i = 1, \dots, k)$
      - für jeden Zustand $q \in Q$ die Nummer i der Klasse Q_i mit $q \in Q_i$

1.) * Gibt es $q, q' \in Q_i$ in derselben Klasse, $a \in \Sigma$
mit $\delta(q,a) \in Q_j$, $\delta(q',a) \in Q_\ell$ in verschiedenen Klassen $j \neq \ell$?

für alle $a \in \Sigma$:
  für alle $i = 1, \dots, k$:
    für alle $q \in Q_i$:
      teste ob alle $\delta(q,a)$ in der gleichen Klasse sind.

Laufzeit: $O(|\Sigma| \cdot n)$

2. Verfeinerung: Q_i, a fest

Spalte $Q_i = Q_{i1} \cup Q_{i2} \cup \dots \cup Q_{ik}$ auf:

$$Q_{ip} = \{ q \in Q_i \mid \delta(q,a) \in Q_p \}, \quad p = 1, \dots, k$$

Initialisiere $Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ik}$ zu einer leeren verketteten Liste. $O(k)$

for $q \in Q_i$:
  Bestimme die Klasse p mit $\delta(q,a) \in Q_p$
  Q_{ip}.append(q) $\left(Q_{ip} := Q_{ip} \cup \{q\} \right)$ $\Big\}\ O(|Q_i|)$

Durchlaufe die Listen $Q_{i1}, \dots, Q_{ik}$; die nichtleeren Klassen sind die neuen Klassen, die Q_i ersetzen.
• Für die nichtleeren Klassen neue Nummern vergeben $\Big\}\ O(k)$

• die Datenstrukturen zur Darstellung der Klassenzerlegung auf den neuesten Stand bringen. $\Big\}\ O(n)$

$O(n)$

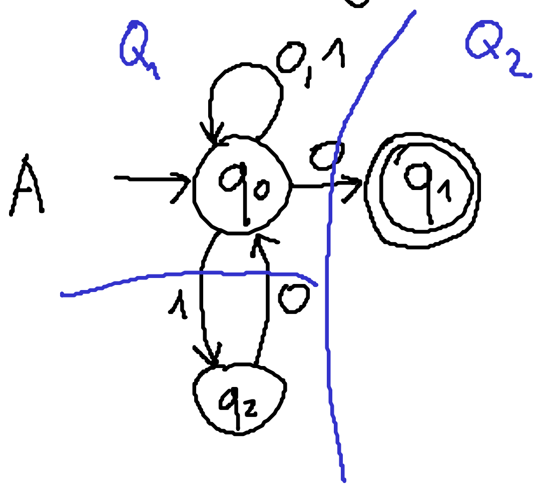
1 Schleifendurchlauf $O(n \cdot |\Sigma|) + O(n) = O(n \cdot |\Sigma|)$

Gesamtalgorithmus: $O(n) \times O(n |\Sigma|) + \underbrace{O(k \cdot |\Sigma|)}_{\leq n} = O(n^2 \cdot |\Sigma|)$

Konstruktion von $\hat{A}$

- Es geht auch in $O(|\Sigma| \cdot (n \log n))$ Zeit
- Der „Tabellenausfüllalgorithmus" benötigt $O(n^4 \cdot |\Sigma|)$ Zeit.

Minimierung von NEA ? ....PSPACE-vollständig



$L(A) = \{0,1\}^* 0$

Nachtrag: Der Minimalautomat ist eindeutig

(bis auf Umbenennung der Zustände)

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sei der Nerodeklassenautomat für L:

$Q = \{ [w]_L \mid w \in \Sigma^* \}$, $\delta([w]_L, a) = [wa]_L$,

$q_0 = [\varepsilon]_L$, $F = \{ [w]_L \mid w \in L \} = \{ [w]_L \mid [w]_L \subseteq L \}$

- $\hat{A} = (\hat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \hat{q}_0, \hat{F})$ sei ein beliebiger Automat mit $L(A) = L$

ohne nicht erreichbare Zustände: $\forall q \in \hat{Q} \; \exists x \in \Sigma^* : \hat{\delta}^*(\hat{q}_0, x) = q$

$\hat{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

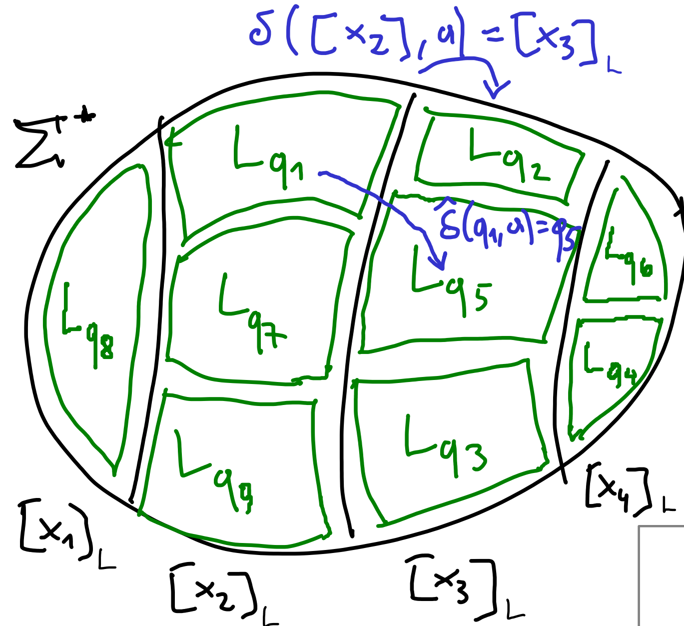
Zerlegung von Σ^*:

$L_q = \{ w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}^*(q_0, w) = q \}$, $\Sigma^* = L_{q_1} \dot\cup L_{q_2} \dot\cup \ldots \dot\cup L_{q_n}$

$L_q \cap L_{q'} = \emptyset$ für $q \neq q'$. ~~L_q kann auch leer sein.~~

(*) $w_1, w_2 \in L_q \Rightarrow \hat{\delta}^*(\hat{q}_0, w_1) = \hat{\delta}^*(\hat{q}_0, w_2) \Rightarrow w_1 \sim_L w_2$

(Aufgabe 24)



$f: \hat{Q} \to Q$

wenn $x \in L_q$: $f(q) = [x]_L$

Beispiel: $f(q_1) = [x_2]_L$

$$f(\hat{\delta}(q, a)) = \delta(f(q), a) \quad (**)$$

$$\begin{tikzcd}
q \in \hat{Q} \arrow[r, "a \text{ lesen}"] \arrow[d, "f"'] & \hat{\delta}(q,a) \in \hat{Q} \arrow[d, "f"] \\
f(q) \in Q \arrow[r, "a \text{ lesen}"] & \delta(f(q), a) \in Q
\end{tikzcd}$$

Beweis von (**):

$x \in L_q$: $f(q) = [x]_L$

R.S. $= \delta([x]_L, a) = [xa]_L$ ✓

L.S.: $xa \in L_{\hat{\delta}(q,a)}$ weil $\hat{\delta}^*(\hat{q}_0, xa) = \hat{\delta}(\hat{\delta}^*(\hat{q}_0, x), a) = \hat{\delta}(\hat{q}, a)$ L.S. $= [xa]_L$ ✓

f ist surjektiv. $\Rightarrow |\hat{Q}| = n \geq |Q| =$ Anzahl der Nerode-Klassen

Wenn $n = |Q|$ (Automat $\hat{A}$ minimal) $\Rightarrow f$ bijektiv

f ist die gesuchte Umbenennung der Zustände, wegen (**)

Noch zu zeigen: $f(\hat{q}_0) = q_0$, $\{ f(q) \mid q \in \hat{F} \} = F$