Konfiguration eines Kellerautomaten

(q, w, γ) $q \in Q$: aktueller Zustand

$w \in \Sigma^*$: verbleibende Eingabe

$\gamma \in \Gamma^*$: Kellerinhalt

Ausgangskonfiguration: (q_0, w, Z_0) ← Eingabewort

Nachfolgekonfiguration $(q, w, \gamma) \vdash (q', w', \gamma')$

Übergangsrelation: $(q, a, z, q', y) \in \delta$ bedeutet:
Wenn der Automat im Zustand q ist,
und das Eingabesymbol a liest (bzw. nichts liest für $a = \varepsilon$),
und das oberste Kellersymbol z ist,
dann kann der Automat in den Zustand q' übergehen
und z an der Spitze des Kellers durch y ersetzen.

Für jedes $(q, a, z, q', y) \in \delta$:

$$(q, aw, z\gamma) \vdash (q', w, y\gamma) \quad (w \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^*)$$

$(q, w, \gamma) \vdash^* (q', w', \gamma')$ Nachfolgekonfiguration in 0 oder mehr Schritten

Def. Die von einem Kellerautomaten K akzeptierte Sprache

$$L(K) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q', \varepsilon, \gamma), q' \in F, \gamma \in \Gamma^* \}$$

Variante: Akzeptieren mit <u>leerem Keller</u>:

$$N(K) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q', \varepsilon, \varepsilon),\ q' \in Q \}$$

(F wird nicht benötigt)

Satz: Für jeden Kellerautomaten K gibt es einen Kellerautomaten K' mit $N(K') = L(K)$, und einen Kellerautomaten K'' mit $L(K'') = N(K)$.

Beweis: 1.) $K \Rightarrow K'$: Wenn der Automat in einem Zustand $q \in F$ ist, dann darf er den Keller leeren.

$$Q' = Q \cup \{\bar{q}\}$$

$$\delta' = \delta \cup \{ (q, \varepsilon, z, \bar{q}, z) \mid q \in F, z \in \Gamma \} \cup \{ (\bar{q}, \varepsilon, z, \bar{q}, \varepsilon) \mid z \in \Gamma \}$$

$$L(K) \subseteq N(K')$$

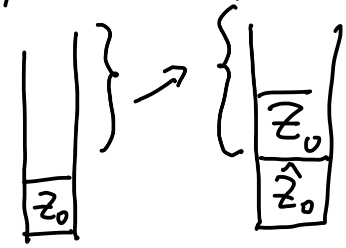
Wir müssen sicherstellen, dass K nie den Keller leert.

$$\Rightarrow L(K) = N(K')$$

Hilfssatz: Zu jedem Kellerautomaten K gibt es einen Kellerautomaten $\hat{K}$ mit $L(\hat{K}) = L(K)$, der den Keller nie leer macht.

$$\hat{Q} = Q \cup \{\hat{q}_0\} \qquad \hat{\Gamma} = \Gamma \cup \{\hat{Z}_0\}$$

$$\hat{\delta} = \delta \cup \{ (\hat{q}_0, \varepsilon, \hat{Z}_0, q_0, Z_0 \hat{Z}_0) \}$$



$K \rightsquigarrow \hat{K}$

2.) $K \Rightarrow K''$

Baue zunächst K in $\hat{K}$ wie im Hilfssatz um, sodass der Keller von $\hat{K}$ nie leer wird.

$$Q'' = \hat{Q} \cup \{q_F\}$$

$$\delta'' = \hat{\delta} \cup \{ (q, \varepsilon, \hat{Z}_0, q_F, \varepsilon) \mid q \in \hat{Q} \} \qquad F = \{q_F\}$$

$\square$