Die Diagonalsprache

$$D = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert die Eingabe } w = \langle M \rangle \text{ nicht} \}$$
$$= \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$

Satz: D ist nicht rekursiv aufzählbar,
(und daher auch nicht entscheidbar.)

Beweis durch Widerspruch:

Annahme: M_D sei eine Turingmaschine mit $L(M_D) = D$

$$\boxed{\langle M_D \rangle \in L(M_D)} \underset{\text{Annahme}}{\Leftrightarrow} \langle M_D \rangle \in D \underset{\text{Definition von } D \ \cancel{M_D}}{\Leftrightarrow} \boxed{\langle M_D \rangle \notin L(M_D)}$$

$\square$

Kern des Beweises: • die Russell'sche Antinomie (1903) $A = \{ x \mid x \notin x \}$
• Selbstbezüglichkeit

Warum Diagonalsprache? $M_1, M_2, M_3, \ldots$ Aufzählung aller TM.

$w \overset{?}{\in} L(M)$

M \ w	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$			
M_1	+	+	+	+	−	
M_2	−	+	−	−	−	
M_3	+	+	$\boxed{-}$	+	−	
M_4	−	−	−	$\boxed{-}$	+	−
⋮					+	
$M_D = M_6$	−	−	+	+	−	− +

$$D = \{ \langle M_3 \rangle, \langle M_4 \rangle, \langle M_6 \rangle, \ldots \}$$

Diagonalisierungsargument

Es gibt unentscheidbare Sprachen!

Das Halteproblem für Turingmaschinen:

Eingabe: Eine Turingmaschine M, ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{0,1\}$

Frage: Hält M bei Eingabe von w?

$$H = \{\langle M\rangle w \in \{0,1\}^* \mid M \text{ hält bei Eingabe von } w\}$$

- Wenn H entscheidbar wäre, dann wäre auch D entscheidbar.

$$D = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\}$$

Algorithmus: Eingabe $\langle M\rangle$

Problem D wird auf H reduziert.

Hält M bei Eingabe von $w = \langle M\rangle$?

Wenn $\langle M\rangle\langle M\rangle \in H$,

Simuliere M mit Eingabe $\langle M\rangle$.

M hält in einem akzeptierenden Zustand: Ausgabe NEIN

M hält in einem nicht akzeptierenden Zustand: Ausgabe JA.

Wenn $\langle M\rangle\langle M\rangle \notin H$, Ausgabe JA.

Folgerung: Das Halteproblem H ist unentscheidbar.

Problemreduktion:

Problem A wird auf Problem B zurückgeführt:

Problem A wird mit Hilfe eines (hypothetischen) Algorithmus für Problem B gelöst.

Notation:

$$A \leq B \qquad (D \leq H)$$

A ist auf B reduzierbar.

Folgerung: B entscheidbar $\Rightarrow$ A entscheidbar

A unentscheidbar $\Rightarrow$ B unentscheidbar

Komplementäre Sprache, Negation der Problemstellung

$\overline{L} = \Sigma^* - L$ = das Komplement der Sprache L

L entscheidbar:

$L = L(M)$ hält immer

$w \in \Sigma^*$
- M sagt JA : $w \in L$ / $w \notin \overline{L}$
- M sagt NEIN : $w \notin L$ / $w \in \overline{L}$

Die entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplement.

L sei rekursiv aufzählbar

$L = L(M)$ $w \in \Sigma^*$
- M sagt JA : $w \in L$
- M sagt NEIN : $w \notin L$
- M hält nicht : $w \notin L$

semientscheidbar: Wenn $w \in L$, dann kann man durch die Turingmaschine M bestätigen, dass $w \in L$ ist.

$$\boxed{L \text{ entscheidbar} \Leftrightarrow L \text{ und } \overline{L} \text{ beide rekursiv aufzählbar}}$$

Beweis: • L entscheidbar $\Rightarrow \overline{L}$ entscheidbar. $\Rightarrow L + \overline{L}$ r.a.

• „$\Leftarrow$" $L = L(M_1)$, $\overline{L} = L(M_2)$, $w \in \Sigma^*$

Lass M_1 und M_2 mit Eingabe w „parallel" laufen.
(Simuliere abwechselnd einen Schritt von M_1 und einen Schritt von M_2)
Sobald die erste Turingmaschine (M_1 oder M_2) hält, ist die Antwort bekannt.
Eine der beiden Maschinen M_1 oder M_2 muss terminieren. $\square$

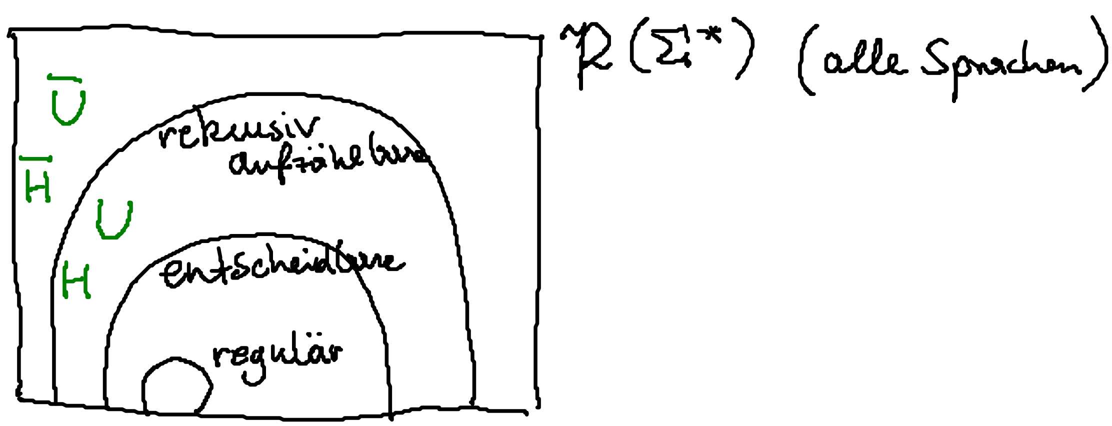
$U = L(M_U) = \{\langle M\rangle w \mid w \in L(M)\}$ ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar, weil $D \leq U$:

$D = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\}$ Eingabe $\langle M\rangle$

Wenn $\underbrace{\langle M\rangle}\underbrace{\langle M\rangle}_{w} \in U$: Ausgabe NEIN

Wenn $\langle M\rangle\langle M\rangle \notin U$ Ausgabe JA $\square$

$\Rightarrow \overline{U}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.



Gibt es unter den Dezimalziffern von $\pi = 3{,}14159\ldots$
beliebig lange Blöcke von Neunen? ENTSCHEIDBAR ✓

- Algorithmus 1: „JA"
- Algorithmus 2: „NEIN"

Eingabe: k
Gibt es unter den Dezimalziffern von $\pi = 3{,}14159\ldots$
einen Block von k Neunen?

REKURSIV AUFZÄHLBAR ✓ ENTSCHEIDBAR?

Abschlusseigenschaften

A) entscheidbare Sprachen
B) rekursiv aufzählbare Sprachen

sind abgeschlossen unter $\cup, \cap, \cdot, {}^*$

Beweis für $L_1 \cdot L_2$ L_1, L_2 rekursiv aufzählbar:

$$w = \underbrace{w_1 w_2 \ldots}_{\in L_1} \underbrace{\ldots w_n}_{\in L_2} \in L_1 L_2 \qquad L_1 = L(M_1) \quad L_2 = L(M_2)$$

Teste $w_1 \ldots w_i \in L_1$ und $w_{i+1} \ldots w_n \in L_2$

für alle $i = 0, \ldots, n$ PARALLEL

for $k = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

  for $i = 0, \ldots, n$:

    Lasse M_1 mit Eingabe $w_1 \ldots w_i$ k Schritte laufen

    Lasse M_2 mit Eingabe $w_{i+1} \ldots w_n$ k Schritte laufen

    Wenn M_1 und M_2 akzeptieren: Ausgabe JA

---

rekursiv <u>aufzählbar</u>? $\rightarrow$ Übung 75