Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter

$\cup$, $\cdot$, $*$, $G_1 = (\Sigma, V_1, P_1, S_1)$, $G_2 = (\Sigma, V_2, P_2, S_2)$

$S \notin V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$L\big((\Sigma, V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}, S)\big) = L(G_1) \cup L(G_2)$

$S \to S_1 S_2 \qquad = L(G_1) \cdot L(G_2)$

Homomorphismen ✓

inversen Homomorphismen (ohne Beweis)

Die kontextfreien Sprachen sind NICHT abgeschlossen unter

Komplement, $\cap$

$L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\} = \{0^n 1^n 2^m \mid m,n \geq 0\} \cap \{0^n 1^m 2^m \mid m,n \geq 0\}$

nicht kontextfrei — kontextfrei

„$\cap$" lässt sich durch „$\cup$" und Komplement „$\overline{}$" ausdrücken:

$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ (de Morgan'sche Regel)

Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter Schnitt mit einer <u>regulären</u> Sprache. (ohne Beweis)

Endscheidungsprobleme für kontextfreie Sprachen

Gegeben: $G_1 = (\Sigma_1, V_1, P_1, S_1)$, $G_2 = (\Sigma_2, V_2, P_2, S_2)$

Folgende Fragen über kontextfreie Sprachen sind entscheidbar:

- Ist $L(G_1) = \emptyset$?
- Ist $L(G_1)$ unendlich ?
- Ist $w \in L(G_1)$?

Folgende Fragen über kontextfreie Sprachen sind unentscheidbar:

- Ist die Grammatik G_1 mehrdeutig?
- Ist die Sprache $L(G_1)$ inherent mehrdeutig?
- Ist $L(G_1) = \Sigma_1^*$?
- Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

ohne Beweis

- Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ← Reduktion vom MPKP

Gegeben: k Paare von Wörtern $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$

$a_i, b_i \in \Sigma^*$

Frage: Gibt es eine Folge $i_1, i_2, \dots, i_m$ von $m \geq 1$ Indizes $i_j \in \{2, \dots, k\}$ mit

$$a_1 a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \dots a_{i_m} = b_1 b_{i_1} b_{i_2} b_{i_3} \dots b_{i_m}$$

$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma \,\dot\cup\, \{2, 3, \dots, k\}$

$L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \iff$ MPKP hat eine Lösung

$L(G_1) = \{ i_m i_{m-1} \dots i_1 a_1 a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} \}$

$L(G_2) = \{ i_m i_{m-1} \dots i_1 b_1 b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_m} \}$

$S_1 \to 2 S_1 a_2 \mid 3 S_1 a_3 \mid \dots \mid k S_1 a_k \mid a_1$, $S_2 \to 2 S_2 b_2 \mid \dots \mid k S_2 b_k \mid b_1$

Die Dyck-Sprache der ausgeglichenen Klammerausdrücke

$$(\, (\,) \, (\,) \, (\, (\, (\,) \,) \,) \, (\,) \,)$$

$$G: \; S \to (S) \mid SS \mid \varepsilon \qquad \Sigma = \{ (,) \}$$

$$\left(S \to [S] \right)$$

$$L(G) = \{ w \in \{(,)\}^* \mid \text{in jedem Präfix gibt es mindestens so viele „(" wie „)",} \; \text{insgesamt gibt es gleich viele „(" wie „)"} \}$$