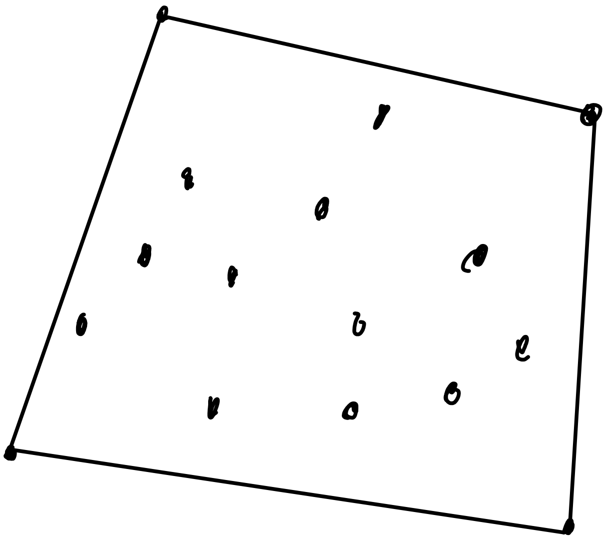
Algorithmische Geometrie, Sommersemester 2025

Ausgabeabhängige Berechnung der konvexen Hülle



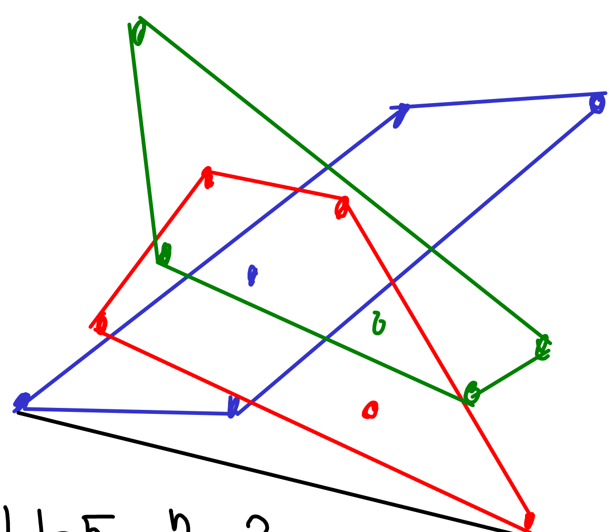
$|P| = n$

- Graham-Scan $O(n \log n)$
- Jarvis-March $O(n h)$

$h$ = # Ecken der konvexen Hülle

- $O(n \log h)$ (Timothy Chan, 1996)

$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{n/H}$ beliebig. $|P_i| = H$



$H=5 \quad \frac{n}{H}=3$

berechne $\mathrm{conv}(P_i)$

Tangente an $P_i$ $O(\log H)$

$n/H$ mal $\rightarrow O(\frac{n}{H} \log H)$

für 1 x drehen bis anstoßen

$h \cdot \frac{n}{H} \log H$ für Jarvis-march

Vorverarbeitung: $O(H \log H) \cdot \frac{n}{H} = O(n \log H)$.

$h \le H$ Vorv: $O(n \log H)$

J.-M. $O(h \cdot \frac{n}{H} \log H) = O(n \log H)$

Ziel: $H \approx h$ wählen $O(n \log h)$ ✓

$h$ nicht bekannt.

$h$ raten und abbrechen sobald $h > H$

Probiere $H_1 < H_2 < H_3 \dots$ bis $H_i \ge h$

1. Versuch $H_1, H_2 \dots 4, 8, 16, 32, \dots 2^i, \dots, n$

$$O(n \log_2 4 + n \log 8 + n \log 16, + \dots n \log h)$$
$$= (n\, 2 + n \cdot 3 + n \cdot 4 + \dots + n \log h)$$
$$= O(n \log^2 h)$$

2. Versuch

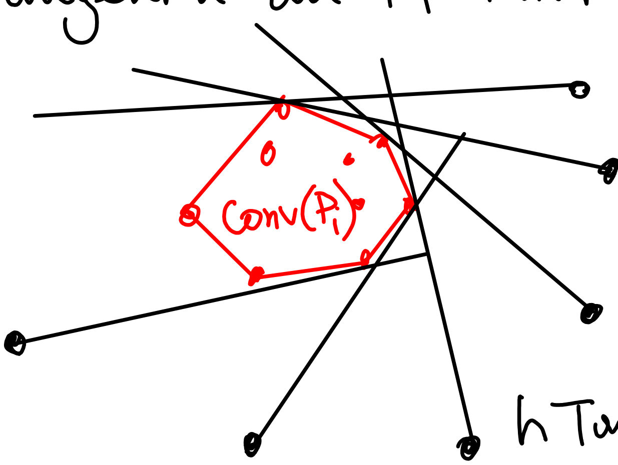
$$H_1, H_2, \dots, = 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, \dots, 2^{2^i}, \dots$$

$$O(n \cdot 2 + n \cdot 4 + n \cdot 8 + \dots \quad n \log h)$$

geometrische Reihe $O(n \log h)$. $\square$

---

$\boxed{1.}$ Tangenten an $P_i$ inkrementell:




← conv(P)

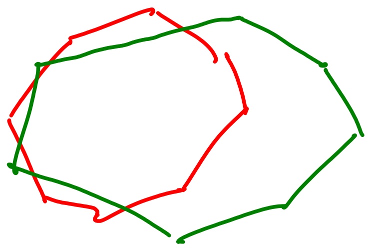
nicht binäre Suche, sondern sequentielle Suche

h Tangenten $O(h + |P_i|)$

Jarvis-March: $\frac{n}{H} \cdot O(h+H) = O(n) \quad (h \leq H)$

$\boxed{2.}$ $H_1, H_2, .. = 4, 8, 16, \ldots$

Jeweils 2 Mengen $P_i$ werden vereinigt.



$O(n)$ Zeit

---

Kombination $\boxed{1.} + \boxed{2.}$: $O(n)$ Testen von $H_i$

$\underset{H_1}{O(n)} + \underset{H_2}{O(n)} + O(n) \quad \ldots \ldots$ bis $H_i > h$ $= \underline{\underline{O(n \log h)}}$

---

Ausblick auf 3D:

- Jarvis march → gift-wrapping

$O(h) \times$ Tangentialebenen anstoßen lassen ✓

$O(\log |P_i|)$ ← Dobkin-Kirkpatrick-Hierarchie ✓

3-D konvexe Hülle in $O(|P_i| \cdot \log |P_i|)$ ✓