Algorithmische Geometrie, Sommersemester 2025

Dichtestes Punktpaar:
Entscheidungsproblem, randomisierter Algorithmus

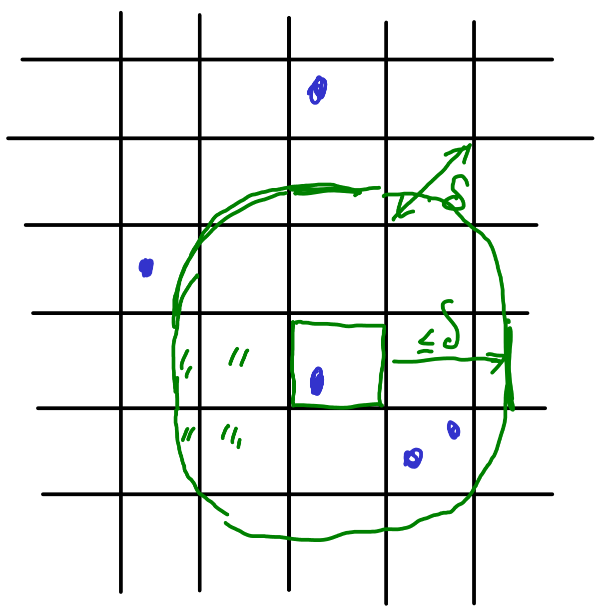
Optimierungsproblem: OPT(P) minimieren
[maximieren]

(binäre Suche)

Entscheidungsproblem:
gegeben: Schranke δ : $OPT(P) \overset{?}{\leq} \delta$

Vgl. NP, NP-vollständig

Entscheidungsalgorithmus für dichtestes Punktpaar:



Punkt $P_i = (x_i, y_i)$

$\rightarrow (u_i, v_i) = \left(\left\lfloor \frac{x}{\delta/\sqrt{2}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{y}{\delta/\sqrt{2}} \right\rfloor\right) \in \mathbb{Z}^2$

der Zelle (u_i, v_i) zugeordnet.

(u, v) ... Schlüssel in eine Hash-Tabelle $O(1)$ erwartete Zugriffszeit

Kollision $\Rightarrow$ STOP $OPT(P) \leq \delta$ [Rabin 1976]

keine Kollisionen: für jeden Punkt $O(1)$ Nachbarzellen absuchen (≤ 20)

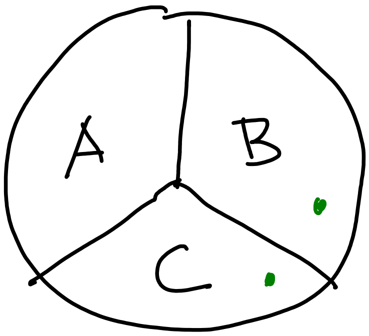
... $O(n)$ Laufzeit (erwartet wg. HASH)

Zerlegbare Probleme $\quad \alpha, r$ fest $\quad \alpha < 1$

$$P \to P_1, P_2, \dots, P_r \qquad |P_i| \leq \alpha |P|$$

$$OPT(P) = \min\left(OPT(P_1), \dots, OPT(P_r)\right)$$

Bsp. dichtestes Punktpaar



$$|A|, |B|, |C| = \frac{|P|}{3} \pm 1$$

$P_1 = A \cup B$

$P_2 = A \cup C \qquad \alpha = 2/3$

$P_3 = B \cup C \qquad r = 3$

Algorithmus

Permutiere $P_1, \dots, P_r$ in eine zufällige Reihenfolge.

$z := \infty$

for $i = 1, \dots, r$:

    if $\boxed{OPT(P_i) < z}$ ← Entscheidungsproblem

    then $z := \boxed{OPT(P_i)}$ ← Optimierungsproblem REKURSIV

- Entscheidungsproblem wird r-mal ausgeführt [$(r-1)$-mal]
- Optimierungsproblem im Erwartungswert H_r-mal

$$H_r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} \sim \ln r \qquad \text{(vgl. Übung 3)}$$

$$\left(Pr[\text{Opt im } i\text{-ten Schritt notwendig}] = \frac{1}{i} \right)$$

$T(n)$ .. $OPT(P)$ berechnen (erwartete Laufzeit)

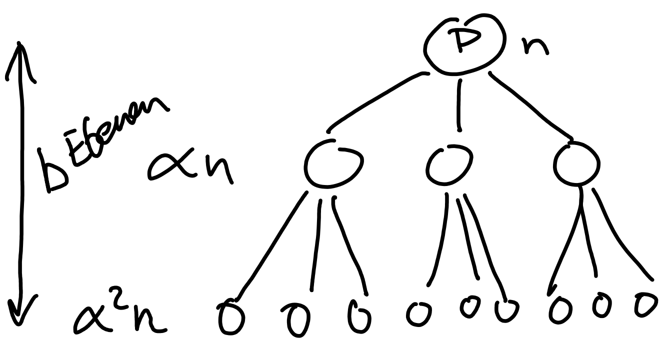
$T_E(n)$ ... $OPT(P) \leq \delta$? ... $O(n)$

$$\boxed{T(n) \leq \underbrace{r \cdot T_E(\alpha n)}_{O(n)} + H_r \cdot T(\alpha n)}$$

$$H_r \cdot \alpha \overset{?}{<} 1$$

$r = 3 \quad H_r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$\alpha = 2/3 \qquad H_r \cdot \alpha \overset{?}{>} 1$



$r = 3$

$r = 9 \qquad H_9 = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9} \approx 2{,}83$

$\alpha^2 = \frac{4}{9}$

$H_{27} \approx 3{,}89 \quad \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0{,}296 \quad \approx 1.15 > 1$

$H_{81} \approx 4{,}98 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 \qquad H_{81} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}98 < 1$

$r' = 81$ Teilprobleme der Größe $n \cdot \alpha'$ $\qquad \alpha' = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$$T(n) = O(n) + 4{,}98 \cdot T\left(n \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^4\right) = O(n)$$

$r' = r^b \qquad \alpha' = \alpha^b \qquad H_{r'} \cdot \alpha' \overset{?}{<} 1$

$$\ln(r^b) \cdot \alpha^b = \underline{\ln r} \cdot \underbrace{b \cdot \alpha^b}_{\to 0 \text{ für } b \to \infty} < 1$$

Rückführung auf Entscheidung für zerlegbare Probleme: [Timothy Chan 1999]

Lemma

- Entscheidungsproblem $OPT(P) \leq z$ kann in $O(|P|^d)$ gelöst werden

$d > 0$

- Zerlegung: α, r fest $\alpha < 1$

P kann in $O(|P|^d)$ Zeit in r Teilprobleme zerlegt werden mit

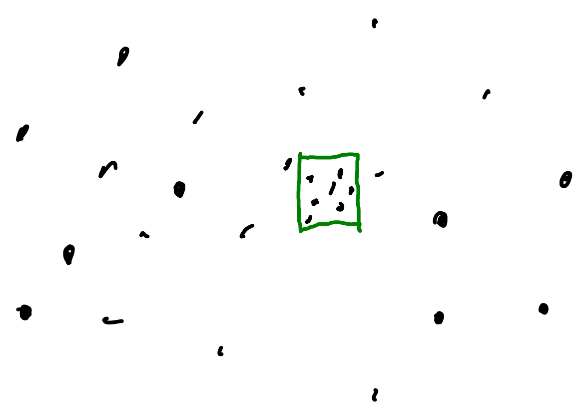
$$P \to P_1, P_2, \ldots, P_r \qquad |P_i| \leq \alpha |P|$$

$$OPT(P) = \min\left(OPT(P_1), \ldots, OPT(P_r)\right)$$

$\Rightarrow$ Dann kann $OPT(P)$ in $O(n^d)$ Zeit berechnet werden. $(n = |P|)$

Finden von „hotspots"

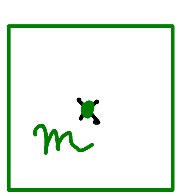
Finde das kleinste Quadrat mit k Punkten (k gegeben)

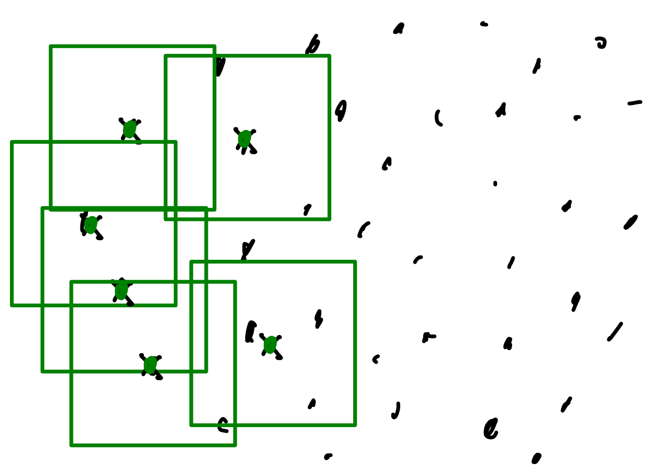


Entscheidungsproblem

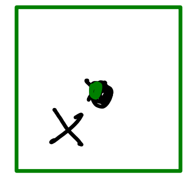
Gegeben z:

Gibt es $z \times z$-Quadrat mit k Punkten?





Wenn m in diesem Quadrat ist, dann ist x durch das Quadrat überdeckt.

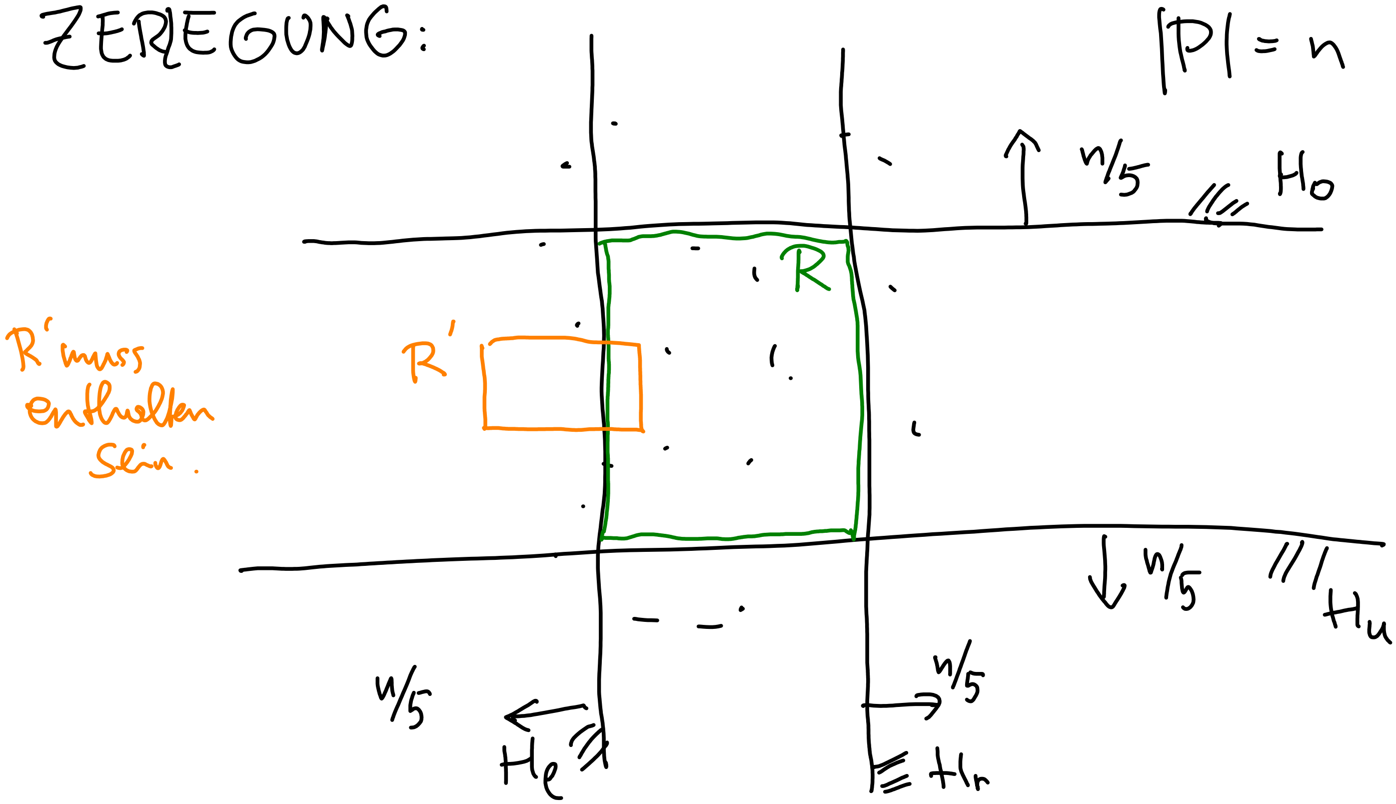


Zeichne um jeden Punkt ein Quadrat $z \times z$. Gibt es einen Punkt, der in k von diesen Quadraten enthalten ist?

- Größte Überdeckungstiefe (Aufgabe 16 für Kreise)

… $O(n \log n)$ Zeit mit Überstreichen.

ZERLEGUNG: $|P| = n$



- 5 Fälle:
  - Q ist disjunkt von H_o … $|P_1| \leq \frac{4}{5} n$
  - … H_u $|P_2| \leq \frac{4}{5} n$ $\alpha = \frac{4}{5}$

$r = 5$

  - H_l $|P_3|$
  - H_r $|P_4|$
  - sonst: Q enthält R. $|R \cap P| \geq \frac{n}{5}$ auf jeden Fall enthalten.

$|R \cap P|$ von k subtrahieren. $|P_5| \leq \frac{4}{5} n$

von $R \cup R'$ aufgespanntes Rechteck nehmen.

Erweitertes Optimierungs/Entscheidungsproblem:

kleinstes Quadrat Q, das k Punkte und <u>zusätzlich</u> ein gegebenes Rechteck R enthält.

($R = \emptyset$ ist möglich)

$$T(n) = O(n \log) \cdot 5^b + H_{5^b} \cdot T\left(\left(\frac{4}{5}\right)^b n\right)$$

$$H_{5^b} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^b = \ln(5^b) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^b < 1$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n \log n).$$