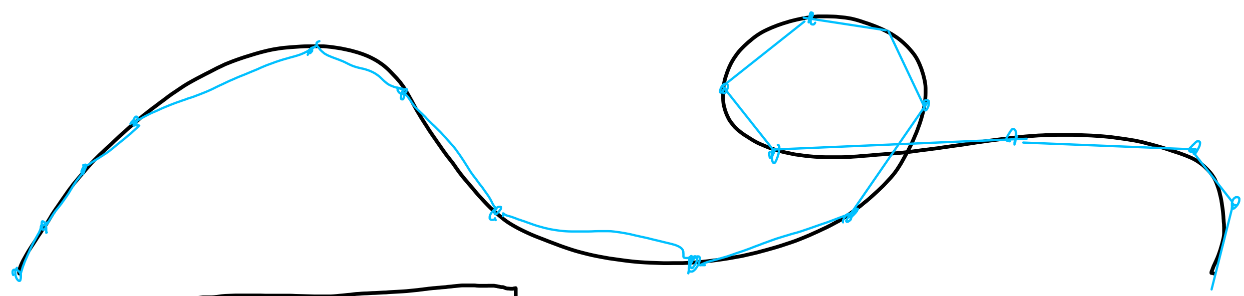
Computergrafik

Spline-Kurven



$x(t)$, $y(t)$, $(z(t))$, $[w(t)]$ ← $\boxed{\text{parametrisch}}$

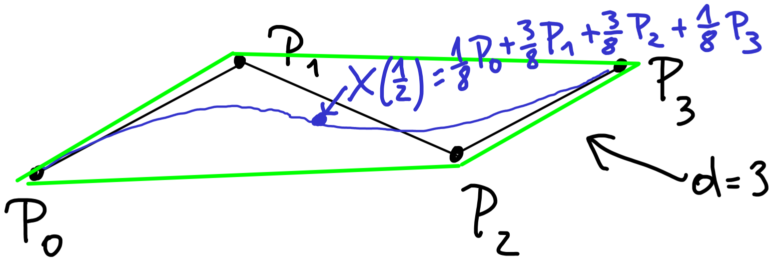
Polynomfunktionen in t, $a \le t \le b$

$\boxed{\text{implizit}}$: $x^2 + y^2 = 1$

Parameter t spielt
- → keine Rolle. (Nur das geometrische <u>Bild</u> ist wichtig.)
- → eine Rolle. (z.B. Kamerafahrt)

Bézier-Splines

Grad $d \ge 1$



$d=3$: kubische Béziersplines

Kontrollpunkte $P_0, P_1, \ldots, P_d \in \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$

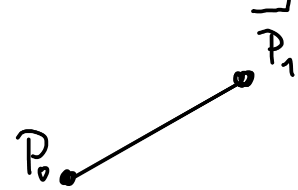
Bernsteinpolynome $B_i^d(t) := \binom{d}{i} t^i (1-t)^{d-i}$, $0 \le t \le 1$ $(0 \le i \le d)$

Definition:

$$\boxed{X(t) = \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t)\, P_i}$$

$$\left[\begin{array}{l} B_i^d(t) \ge 0 \quad (0 \le t \le 1) \\ \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t) = 1 \end{array}\right]$$

$d=1$: $B_0^1(t) = 1-t$, $B_1^1(t) = t$. $X(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$



$$X = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_d P_d \quad \text{mit } \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_d = 1, \ \lambda_i \geq 0$$

heißt eine <u>Konvexkombination</u> von $P_0, P_1, \dots, P_d$.

- ... liegt in der <u>konvexen Hülle</u> von $P_0, P_1, \dots, P_d$.

$X(0) = P_0$, $X(1) = P_d$ $\quad X(t)$ geht i. A. nicht durch $P_1, P_2, \dots, P_{d-1}$.

<u>nicht</u> interpolierend

$X(t)$ ist beliebig oft stetig differenzierbar (als Funktion von t).

Trotzdem kann es im geometrischen Sinn Singularitäten geben.

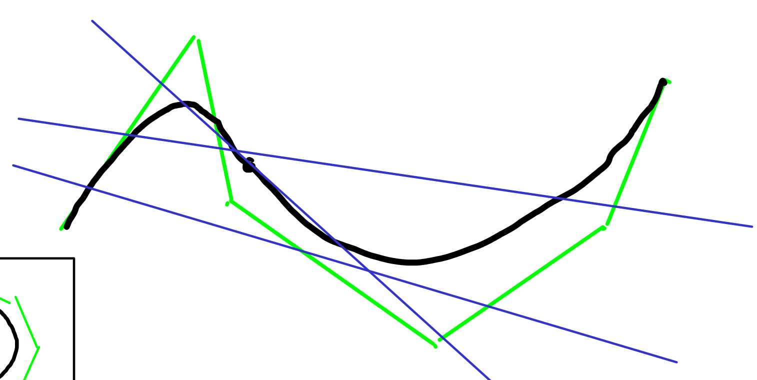
- <u>Äquivarianz</u> gegenüber affinen Transformationen.
  Wenn das Kontrollpolygon einer affinen Transformation unterworfen wird, dann wird die Splinekurve derselben affinen Transformation unterworfen.

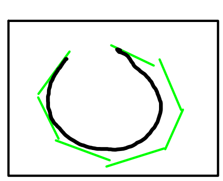
$P_i \mapsto A P_i + b$

$$X = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_d P_d \mapsto \bar{X} = \underbrace{\lambda_0 (A P_0 + b)}_{\lambda_0 A P_0 = A(\lambda_0 P_0)} + \dots + \lambda_d (A P_d + b) =$$

$$= A \underbrace{(\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_d P_d)}_{X} + \underbrace{\lambda_0 b + \dots + \lambda_d b}_{\underbrace{(\lambda_0 + \dots + \lambda_d)}_{1} b} = A X + b$$

- <u>Variationsminderung:</u>
  Eine Gerade schneidet die Splinekurve höchstens so oft wie das Kontrollpolygon.

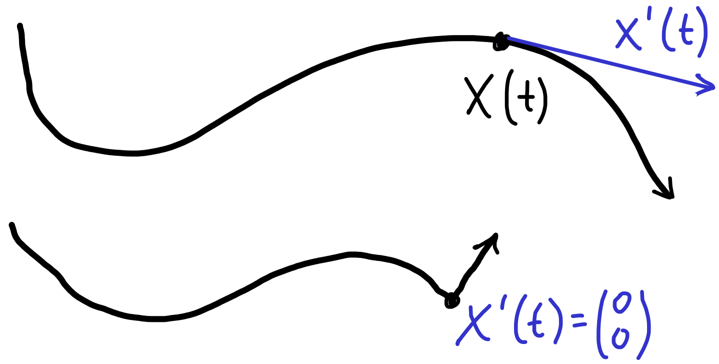




- konvexes Kontrollpolygon → konvexe Kurve

Tangenten $\quad X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \qquad X'(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$ ...

.. Geschwindigkeit



$X'(t)\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ zeigt in Tangentenrichtung

$$X(t)=(1-t)^d P_0 + d\,(1-t)^{d-1}t\,P_1+\binom{d}{2}(1-t)^{d-2}t^2P_2+\dots$$

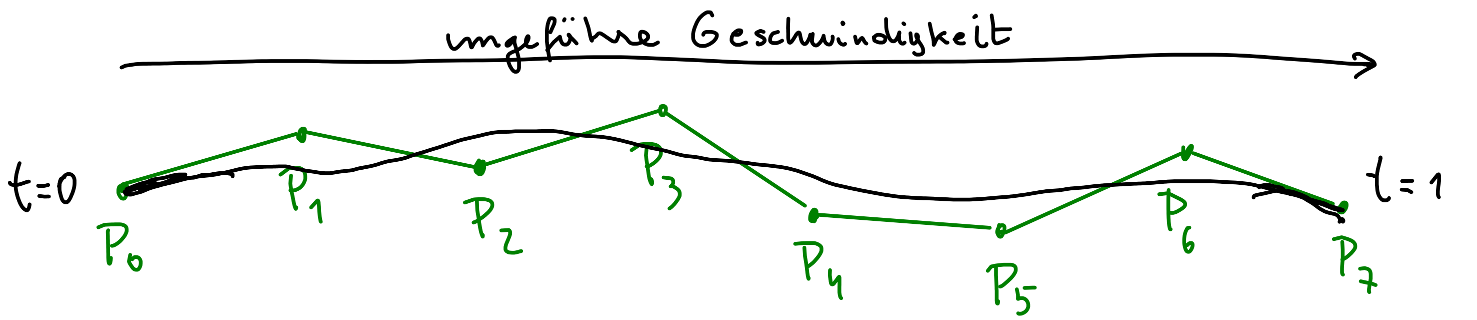
$$X'(t)=-d\,\underbrace{(1-t)^{d-1}}_{1}P_0\;\underbrace{-\,d(d-1)(1-t)^{d-2}t\,P_1}_{=0}+d\,\underbrace{(1-t)^{d-1}}_{1}P_1+\underbrace{\dots t^2+2t+}_{=0}$$

$t=0$

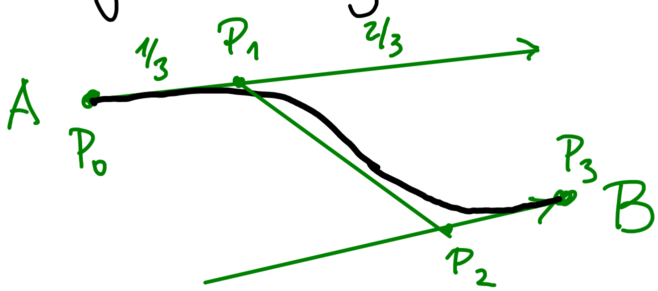
$$\boxed{X'(0)=d\,(P_1-P_0)}$$

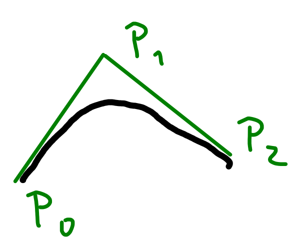
Die Tangente im Punkt P_0 zeigt zum Punkt P_1

Die Tangente im Punkt P_d zeigt zum Punkt P_{d-1}.

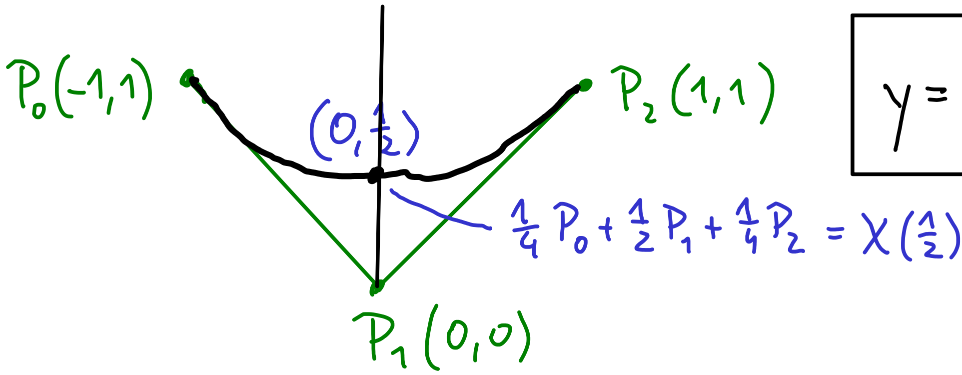


Hermite-Splines: kubische ($d=3$) Splines zwischen zwei Punkten A und B mit vorgegebener Anfangs- und Endgeschwindigkeit (+ Richtung)





(Alle) Quadratischen Splines sind Parabelbögen.



$$\boxed{y = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}}$$

... andere Kontrollpolygone $P_0P_1P_2$ durch affine Transformationen.

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ← quadratische Funktionen von t

$$x(t) = 3t^2 + 4t + 5$$
$$y(t) = 6t^2 + 7t + 8 \quad (\cdot(-2))$$

$$\left[\begin{array}{l} \underbrace{y(t) - 2x(t)}_{\text{Scherung}} = -t - 2 \\ x(t) = 3t^3 + 4t + 5 \end{array}\right]$$