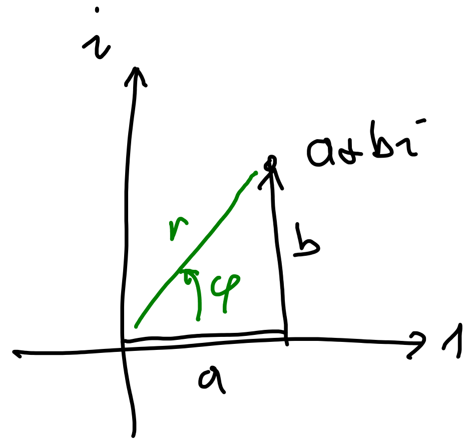
Komplexe Zahlen und Quaternionen



$z = a + bi \qquad a,b \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1$

$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

(Addition von Vektoren, Translation)

$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bd\underbrace{i^2}_{-1} = \ldots$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r$

Argument

Betrag $\in \mathbb{R}$

$z \mapsto z \cdot \overbrace{\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{Drehung um } \varphi}\cdot r}$

Drehung um φ

Streckung um den Faktor r

$z \mapsto \bar{z} = a - bi$ Spiegelung an der x-Achse

$z \mapsto u \cdot z + v \qquad u, v \in \mathbb{C}$

$u \cdot \bar{z} + v$

alle starren Transformationen der Ebene.

+ Skalierungen

Quaternionen $q = a + bi + cj + dk \quad , a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} i^2 = j^2 = k^2 = -1 & & \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}}$$

assoziativ: $(qr)s = q(rs)$

nicht kommutativ!

$$(3+i)(4i+5k) = 12i + 15k + 4\underbrace{i^2}_{-1} + 5\underbrace{ik}_{-j} = -4 + 12i - 5j + 15k$$

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

Drehung um den Winkel φ um die Achse $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$: $(u^2 + v^2 + w^2 = 1)$

durch den Ursprung

$$q = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}(ui + vj + wk)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \iff \text{Quaternion } xi + yj + zk$$

$$\boxed{xi + yj + zk \mapsto q \cdot (xi + yj + zk) \cdot \bar{q}}$$