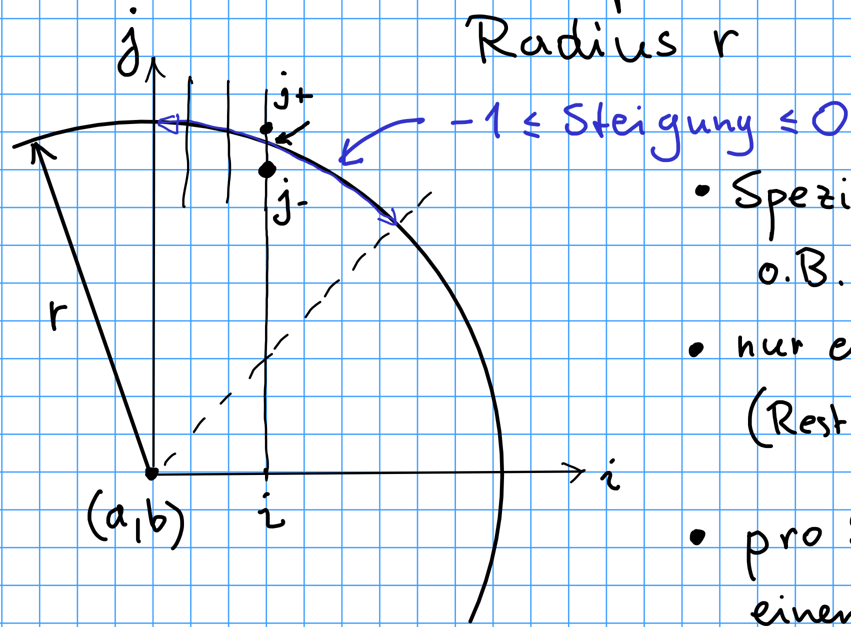
Rastern von Kreisen

Mittelpunkt (a,b)

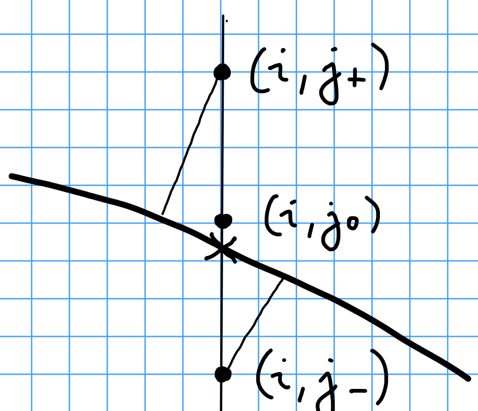
Radius r

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$



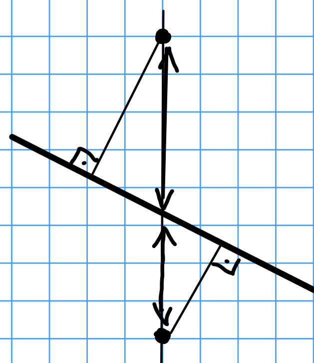
- Spezialfall $a, b \in \mathbb{Z}$
  o.B.d.A. $(a,b) = (0,0)$
- nur ein Achtel des Kreises
  (Rest durch Symmetrie): $\boxed{0 \leq i \leq j}$
- pro Spalte i genau
  einen Punkt (i,j) zeichnen.
  entweder (i, j_-) oder (i, j_+).

Kriterien für die Entscheidung zwischen j_- und $j_+ = j_- + 1$:

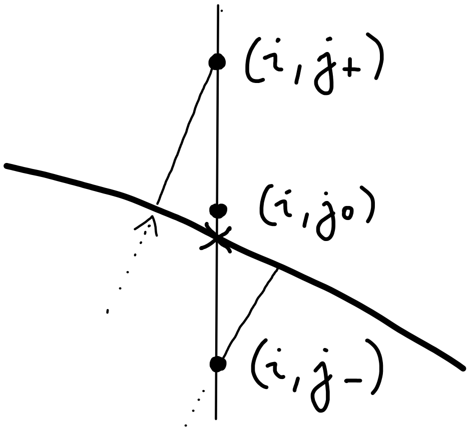


- Abstand vom Kreis
- Halbierungspunkt $j_0 = \frac{j_- + j_+}{2}$
- Gleichung $\left| i^2 + j^2 - r^2 \right| \rightarrow \text{MIN}$

Bei Geraden sind die
drei Kriterien äquivalent:



Welches der
drei Kriterien
ist (für einen Kreis)
am einfachsten
zu programmieren?



- Abstand vom Kreis
- Halbierungspunkt $j_0 = \frac{j_- + j_+}{2}$
- Gleichung $|i^2 + j^2 - r^2| \to \text{MIN}$

A $\sqrt{i^2 + j_+^2} - r \gtrless r - \sqrt{i^2 + j_-^2}$ (> wähle j_-, < wähle j_+)

$\frac{1}{2}\left[\underbrace{\sqrt{i^2+j_+^2}}_{A} + \underbrace{\sqrt{i^2+j_-^2}}_{B}\right] \gtrless \cancel{2}\, r$ („HOCH“ bei >)

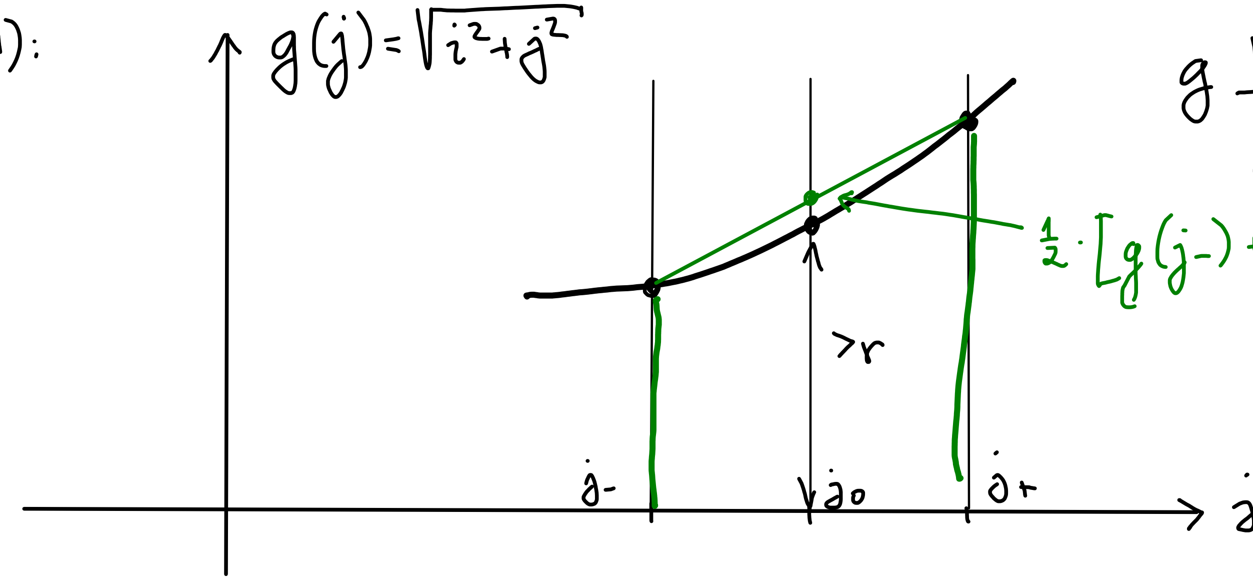
H $\boxed{i^2 + j_0^2 \gtrless r^2}$ („HOCH“ bei >)

G $(i^2 + j_+^2) - r^2 \gtrless r^2 - (i^2 + j_-^2)$

$\boxed{\overbrace{(i^2+j_+^2)}^{A^2} + \overbrace{(i^2+j_-^2)}^{B^2} \gtrless 2r^2}$ („HOCH“ bei >)

Lemma: $\boxed{H \text{ hoch} \overset{(1)}{\Rightarrow} A \text{ hoch} \overset{(2)}{\Rightarrow} G \text{ hoch}}$

(1): $g(j) = \sqrt{i^2 + j^2}$



$\frac{1}{2} \cdot [g(j_-) + g(j_+)] \geq r$

g konvex: $g''(j) \geq 0$

(2) A hoch: $A + B > 2r \Rightarrow A^2 + 2AB + B^2 > 4r^2$

$\Downarrow$!

G hoch: $A^2 + B^2 > 2r^2$

$$\begin{array}{rl} & A^2 + 2AB + B^2 > 4r^2 \quad \Big|\, + \\ (A-B)^2 = & A^2 - 2AB + B^2 \geq 0 \\ \hline & 2A^2 + 2B^2 > 4r^2 \end{array}$$

Nachtrag: Elementarer Beweis von (1)

$j_+ = j_0 + \frac{1}{2}$

$j_- = j_0 - \frac{1}{2}$

$\underline{H}$ hoch: $i^2 + j_0^2 > r^2$

$\Downarrow$

$\underline{A}$ hoch: $\sqrt{i^2+j_+^2} + \sqrt{i^2+j_-^2} > 2r$

$$\sqrt{i^2+j_+^2} + \sqrt{i^2+j_-^2} \overset{!}{\geq} 2\sqrt{i^2+j_0^2} > 2r$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(i^2+j_+^2)}_{i^2+(j_0+\frac{1}{2})^2} + \underbrace{(i^2+j_-^2)}_{i^2+(j_0-\frac{1}{2})^2} + 2\sqrt{(i^2+j_+^2)(i^2+j_-^2)} \geq 4i^2 + 4j_0^2$$

$$\left(i^2+j_0^2+\cancel{j_0}+\frac{1}{4}\right) + \left(i^2+j_0^2-\cancel{j_0}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{2}\sqrt{(i^2+j_+^2)(i^2+j_-^2)} \geq \cancel{2}i^2 + \cancel{2}j_0^2 - \frac{1}{\cancel{2}}\ \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (i^2+j_+^2)(i^2+j_-^2) \geq \left(i^2+j_0^2-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Big(\underbrace{i^2+j_0^2+\frac{1}{4}}_{A} \underbrace{+\,j_0}_{+B}\Big)\Big(\underbrace{i^2+j_0^2+\frac{1}{4}}_{A} \underbrace{-\,j_0}_{-B}\Big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(i^2+j_0^2+\frac{1}{4}\right)^2 - j_0^2 \geq \left(i+j_0^2-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Big(\underbrace{i^2+j_0^2+\frac{1}{4}}_{A'}\Big)^2 - \Big(\underbrace{i+j_0^2-\frac{1}{4}}_{B'}\Big)^2 \geq j_0^2$$

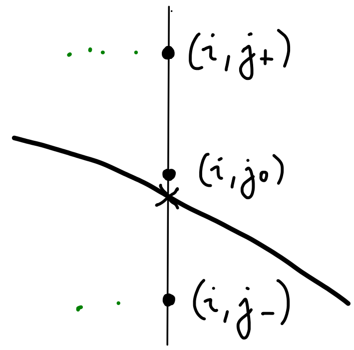
$$(A'+B')(A'-B') = 2(i^2+j_0^2)\cdot\frac{1}{2} \overset{!}{\geq} j_0^2$$

Auswertung der Kriterien H und G

$$\boxed{H \text{ hoch} \overset{(1)}{\Rightarrow} A \text{ hoch} \overset{(2)}{\Rightarrow} G \text{ hoch}}$$

<u>H</u> $\boxed{i^2 + j_0^2 \gtrless r^2}$

<u>G</u> $\boxed{(i^2 + j_+^2) + (i^2 + j_-^2) \gtrless 2r^2}$



$j_0 = j_+ - \frac{1}{2}$

$j_- = j_+ - 1$

$$H: \quad i^2 + \left(j_+ - \tfrac{1}{2}\right)^2 - r^2$$

$$= \boxed{i^2 + j_+^2 - j_+ - r^2 + \tfrac{1}{4} \gtrless 0}$$

$$\boxed{f(i,j) := i^2 + j^2 - j - r^2}$$

„HOCH“ ≥ 0

< 0

$$G: \quad i^2 + j_+^2 + i^2 + (j_+ - 1)^2 - 2r^2$$

$$= 2i^2 + \underbrace{j_+^2 + j_+^2} - 2j_+ + 1 - 2r^2 \gtrless 0$$

$$\boxed{i^2 + j_+^2 - j_+ - r^2 + \tfrac{1}{2} \gtrless 0}$$

Satz: Wenn der Mittelpunkt und der <u>quadrierte</u> Radius r^2 des Kreises ganzzahlig sind, dann liefern die drei Kriterien (G), (A) und (H) immer dasselbe Ergebnis, und es gibt nie einen Gleichstand (=).

1. Algorithmus zum Zeichnen eines Achtelkreises

$$f(i,j) := i^2 + j^2 - j - r^2$$

Eingabe: $R \equiv r^2 \in \mathbb{Z}$

$i := 0;\ j := \text{round}(\sqrt{R})$ $\quad (j \equiv j^+)$

while $i \leq j$:

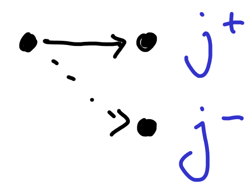
[nachträgliche Korrektur]

  setPixel(i,j)

  $i := i+1$

  if $f(i,j) \geq 0$:

    $j := j-1$ $\quad (\equiv j^-)$



---

2. Algorithmus: f mitführen

$$\Delta_i f := f(i+1,j) - f(i,j) = (i+1)^2 - i^2 = \underline{2i+1}$$

$$\Delta_j f := f(i,j-1) - f(i,j) = (j-1)^2 - (j-1) - (j^2 - j)$$
$$= \cancel{j^2} - 2j + 1 \cancel{-j} + 1 - \cancel{j^2} \cancel{+j} = \underline{-2j+2}$$

$i := 0;\ j := \text{round}(\sqrt{R})$

$f := j^2 - j - R$

while $i \leq j$:

  setPixel(i,j)

  $i := i+1$

  $f := f + \underline{2i+1}$

  if $f\cancel{(i,j)} \geq 0$:

    $j := j-1$

    $f := f \underline{-2j+2}$

Algorithmus 3, 4, …

$\Delta_i f$ mitführen

$\Delta_j f$ — " —