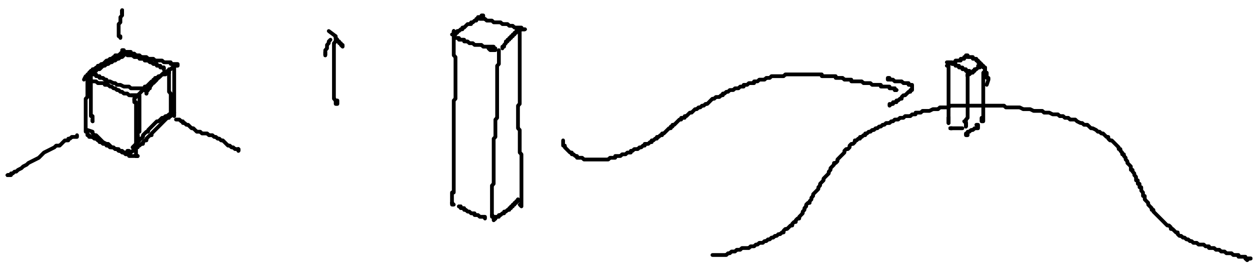
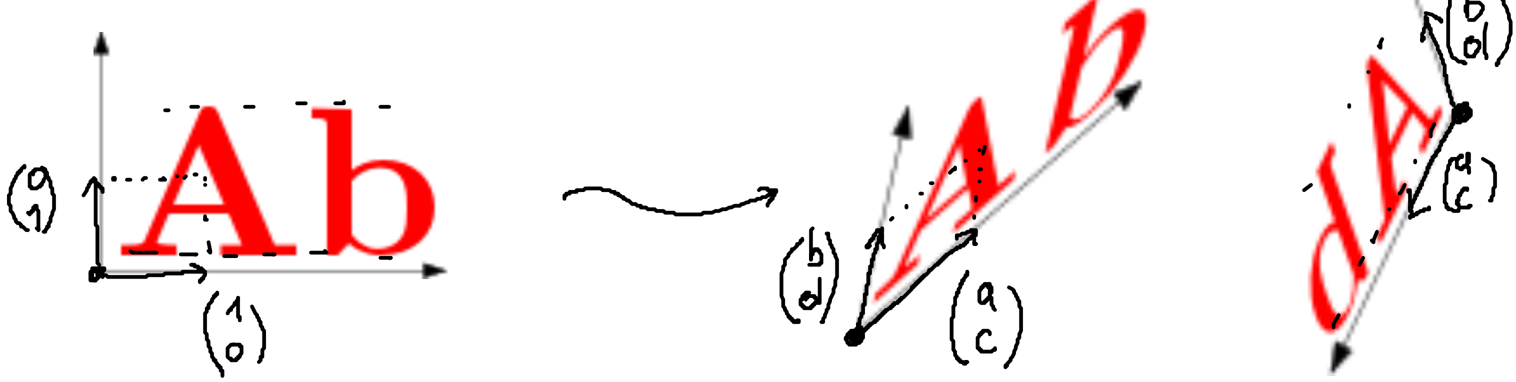
Computergrafik

Geometrische Transformationen (Fortsetzung)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ allgemeine lineare Transformationen



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$ allgemeine ~~lineare~~ affine Transformationen

Parallele Geraden bleiben parallel.

Spezialfall: Scherung

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

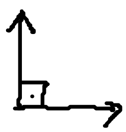
$a \in \mathbb{R}$

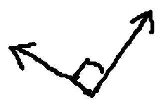
Orthogonale Transformationen = starre Transformationen

$$\boxed{q = Ap + \underline{b}} \qquad p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

A: 2×2, b: $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

A orthogonal: Die Spalten von A sind <u>aufeinander senkrecht</u> und haben <u>Länge 1.</u>

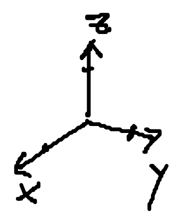


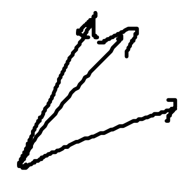


$$A^{-1} = A^T$$

$\det A = \pm 1$, je nach Orientierung

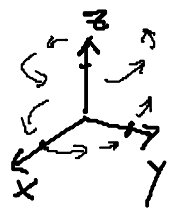
<u>im Raum</u>: $p, q, b \in \mathbb{R}^3$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$





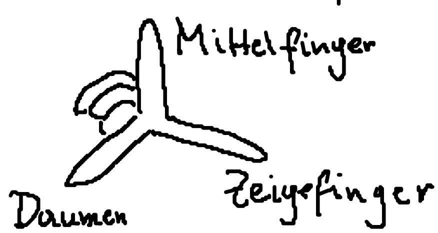
Rotationsmatrizen im Raum:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Rotation um die z-Achse

$$\begin{array}{c|c|c} x & \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} & \\ y & & 0 \\ z & & -\sin\varphi \\ x & \quad\quad 0 \quad \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}$$



..um die y-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

...um die x-Achse

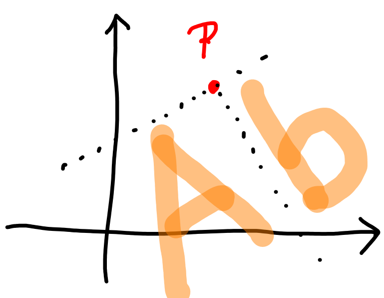
Jede Rotationsmatrix im $\mathbb{R}^3$ hat eine <u>Achse</u>, deren Punkte <u>Fixpunkte</u> sind.

Affine Transformationen in homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \underline{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\w=1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&e\\c&d&f\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{q = M\cdot p}$$



$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto R_\varphi\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - P\right] + P$$

Rotation um Punkt P.

nachträgliche Korrektur

BEI UNS.

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix} = q = \underbrace{M_3(M_2(M_1}_{M = M_3 M_2 M_1} p)) \qquad p = \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

$$q = \underline{M}\cdot p$$

p, q Spaltenvektoren

Transformationsmatrizen werden von Links multipliziert.

ANDERE KONVENTION:

$$p = M^{-1} q \quad \text{(inverse Transformation)}$$

$$q^T = (M\cdot p)^T = p^T \cdot M^T$$

Multiplikation von rechts

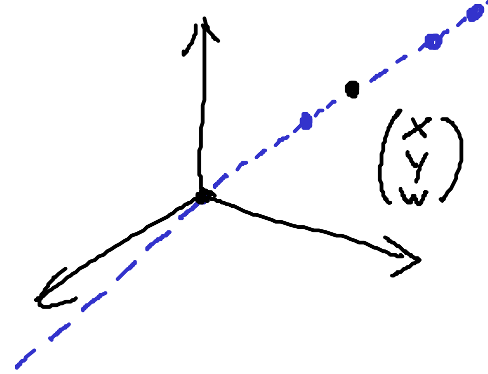
transponierte Matrix

Zeilenvektoren

Die projektive Ebene

$$\begin{pmatrix}x\\y\\w\end{pmatrix}\cdot\lambda \qquad (\lambda\neq 0) \qquad \begin{pmatrix}x\cdot\lambda\\y\cdot\lambda\\w\cdot\lambda\end{pmatrix}$$

Gerade durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$

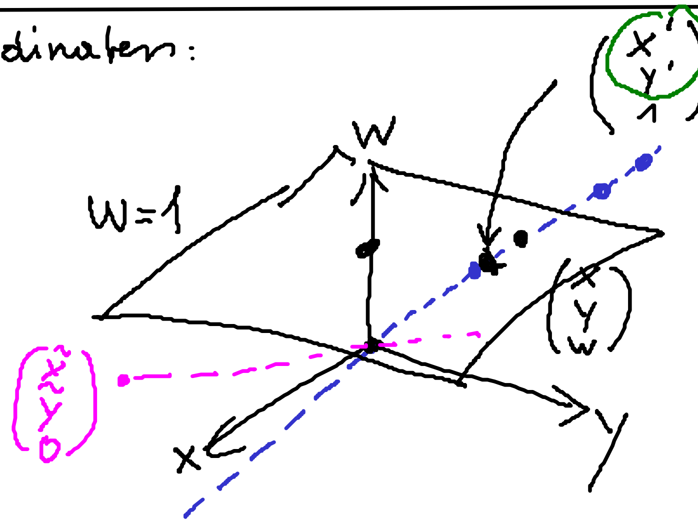


RÄUMLICHES MODELL DER PROJEKTIVEN EBENE

Umwandlung in kartesische Koordinaten:

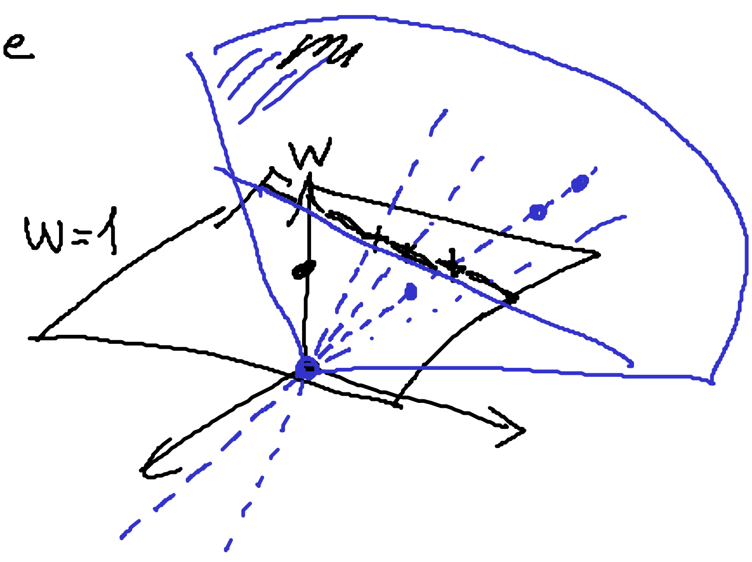
- Finde den Punkt auf der Geraden mit $w=1$

Schwierigkeiten für $\begin{pmatrix}x\\y\\w\end{pmatrix}$ mit $w=0$ (horizontale Geraden)

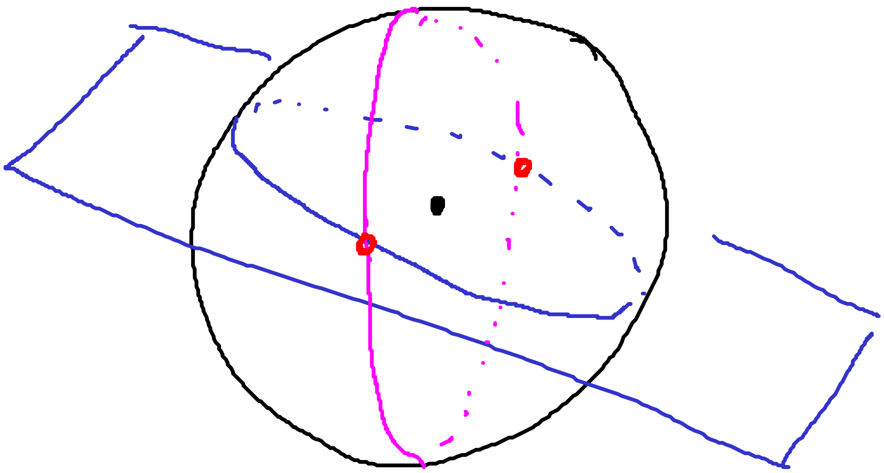


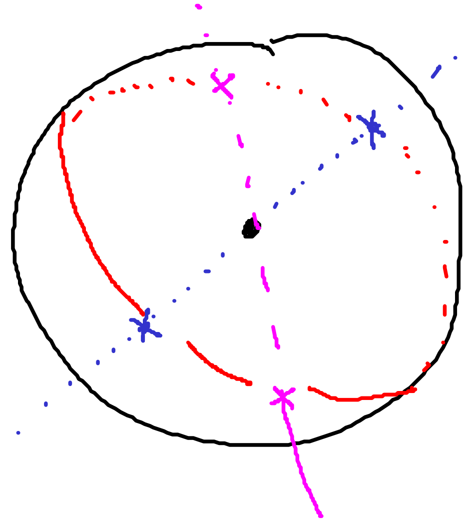
Gerade der projektiven Ebene

$\equiv$ Ebene durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$



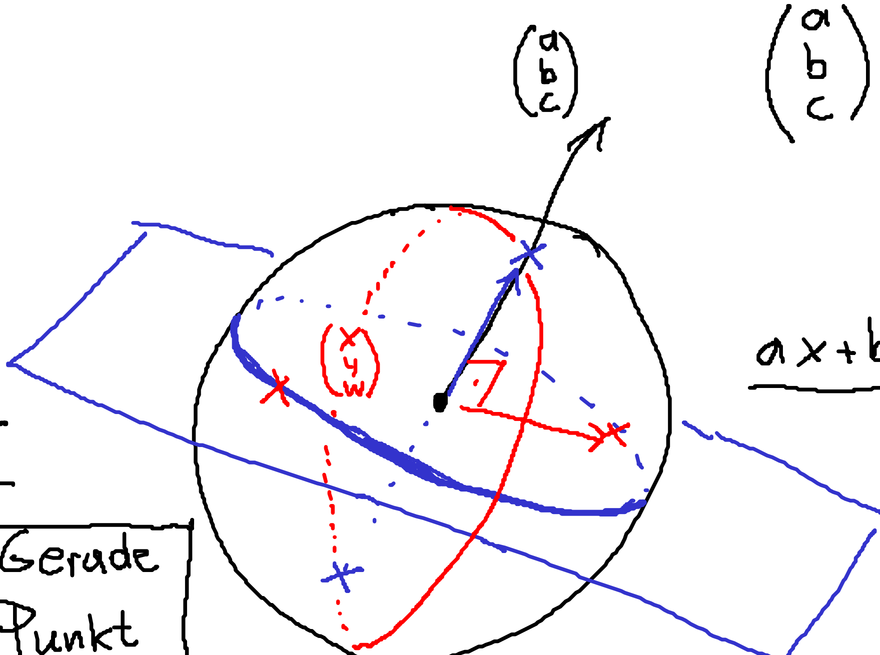
Das Kugelmodell der projektiven Ebene





Punkt der projektiven Ebene $\equiv$ ein Paar antipodaler (entgegengesetzter) Punkte auf der Einheitskugel

Gerade — " — $\equiv$ ein Großkreis



$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ = homogene Koord. der Geraden = Normalvektor der Ebene im räumlichen Modell

$ax + by + cw = 0$

DUALITÄT

Punkt $\leftrightarrow$ Gerade
Gerade $\leftrightarrow$ Punkt

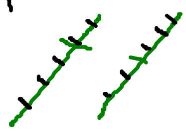
$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = 0}$$

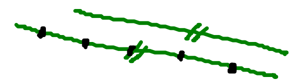
Die projektive Ebene als Erweiterung der euklidischen Ebene

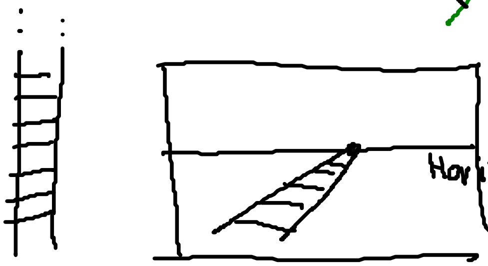
(nächste Stunde)

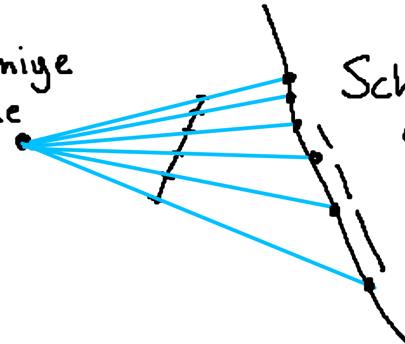
Projektive Transformationen

- affine Transformationen : parallel bleibt parallel.







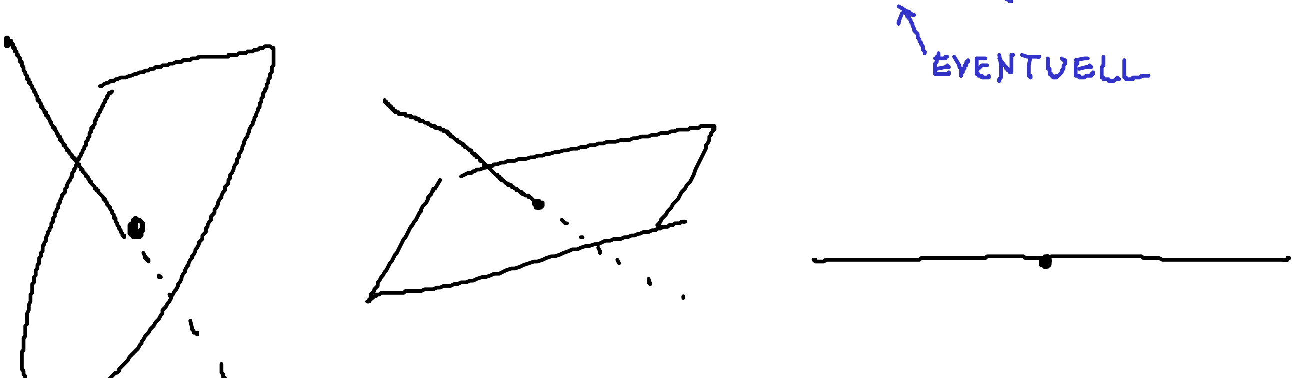


DEFINITION.

$$q = A p \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{affine Transformation}$$

$$p, q = \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ beliebig} \;\Big|\; \leftarrow \text{projektive Transf.}$$

$[\det A \neq 0]$ ← EVENTUELL



Eine Schar von Geraden, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen oder parallel sind, wird durch eine projektive Transformation wieder auf eine Schar von Geraden abgebildet, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen oder parallel sind.

projektive Transformationen in Kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} ax+by+c \\ dx+ey+f \\ gx+hy+i \end{pmatrix} \div$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{ax+by+c}{gx+hy+i} \\ \dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+i} \end{pmatrix}$$

„gebrochen-lineare"
Transformation