1 Stufe 1: $O(n \log \log n)$

$P = p_1 p_2 \dots p_n$ ist ein einfaches Polygon mit n Ecken und n Seiten. Wir bringen die Seiten in eine zufällige Reihenfolge $s_1, \dots, s_n$. Jede Seite s_i ist von der Form $p_k p_{k+1}$.

Wir setzen allgemeine Lage voraus. Wir bezeichnen die Trapezzerlegung der ersten i Kanten mit T_i und die Suchstruktur mit Q_i. Q_i hängt von der Reihenfolge ab, T_i nicht.

Es sei $n_1 := \lceil \frac{n}{\log_2 n} \rceil$

(0) Bestimme T_{n_1} und Q_{n_1} durch Einfügen der ersten n_1 Seiten.

(1) Durchlaufe das Polygon P von Trapez zu Trapez in T_{n_1} und bestimme dabei für jede Ecke $p_k \notin T_{n_1}$ das Trapez in T_{n_1}, in dem sie enthalten ist.

for $i := n_1 + 1, \dots, n$:

Es sei $s_i = p_k p_{k+1}$

(2) Falls $p_k \notin T_{i-1}$, bestimme das Trapez in T_{i-1}, in dem die Ecke p_k enthalten ist, mit Hilfe von Q_{i-1}, ausgehend von der Information aus Schritt (1).

(3) Berechne T_i und Q_i durch Einfügen von s_i in T_{i-1} und Q_{i-1}.

Lemma 1. *Die erwartete Laufzeit für Zeile (0) ist* $O(n_1 \log n_1) = O(\frac{n}{\log n} \log n) = O(n)$.

Lemma 2. *Es sei* $1 \leq r < i \leq n$. *Dann überschreitet die Kante* s_i *im Erwartungswert höchstens 4 Trapezwände von* T_r.

Beweis. Rückwärtsanalyse. Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment:

- Wähle eine Menge S von r Strecken zufällig aus und konstruiere ihre Trapezzerlegung T.
- Wähle eine der $n - r$ verbliebenen Strecken s zufällig aus.
- Wie viele Wände von T werden von s zerschnitten?

Dies ist die Größe, deren Erwartungswert im Lemma betrachtet wird. Wir betrachten ein zweites Zufallsexperiment:

- Wähle eine Menge S' von $r + 1$ Strecken zufällig aus und konstruiere ihre Trapezzerlegung T'.
- Wähle eine dieser $r + 1$ Strecken s' zufällig aus.
- Wie viele senkrechte Wände von T' enden auf der Strecke s'?

Nun ist leicht zu sehen, dass jede Kombination (S, s) im ersten Experiment mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vorkommt wie die entsprechend Kombination $(S', s') = (S \cup \{s\}, s)$ im zweiten Experiment, und dass zweitens in diesem Fall die beiden Fragen die gleiche Antwort haben.

Die Antwort auf die zweite Frage ist leicht abzuschätzen. Bei $r + 1$ Strecken gibt es höchstens $2(r + 1)$ Endpunkte und somit höchstens $4(r + 1)$ Wände und höchstens $4(r + 1)$ Endpunkte von Wänden. Auf einer zufälligen Strecke s' gibt es daher im Mittel höchstens $\frac{4(r+1)}{r+1} = 4$ Endpunkte von Wänden. $\square$

Lemma 3. *Die erwartete Laufzeit für Zeile (1) ist* $O(n)$.

Beweis. Auf Grund von Lemma 2 überschreitet jede Kante $p_k p_{k+1}$, die noch nicht in T_{n_1} enthalten ist, im Erwartungswert höchstens 4 Trapezwände. $\square$

Lemma 4. *Die erwartete Anzahl an Abfragen für die Suche in Zeile (2) ist höchstens* $12(\frac{1}{n_1+1} + \frac{1}{n_1+2} + \cdots + \frac{1}{i-1})$, *und*

$$\frac{1}{n_1+1} + \frac{1}{n_1+2} + \cdots + \frac{1}{i-1} \leq \int_{x=n_1}^{i-1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(i-1) - \ln n_1 \leq \ln n - \ln n_1$$
$$= \ln \frac{n}{n_1} \leq \ln \log n = O(\log \log n).$$

Beweis. Es sei $n_1+1 \le j \le i-1$. Die Suche nach p_k durchläuft genau dann den Teil der Suchstruktur Q_{i-1}, der beim beim Hinzufügen von s_j entstanden ist, wenn p_k in einem der Trapeze von T_j liegt, die beim Hinzufügen von p_j entstanden sind. Wenn dieser Fall eintritt, dann verursacht dieser Teil der Suchstruktur maximal 3 Abfragen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Suche nach p_k durch ein Trapez von T_j verläuft, das beim Hinzufügen von s_j neu entstanden ist, ist höchstens $4/j$. [Beweis ebenfalls durch Rückwärtsanalyse: Das Trapez Δ von T_j, das p_k enthält, ist genau dann im letzten Schritt entstanden, wenn eine der höchstens 4 Strecken, die Δ definieren, die letzte Strecke s_j war.] $\square$

Die folgende Aussage, die ebenfalls auf Lemma 2 beruht, gilt unverändert wie bei der klassischen randomisierten inkrementellen Konstruktion.

Lemma 5. *In Zeile (3) werden im Erwartungswert höchstens konstant viele alte Trapeze besucht und konstant viele neue Trapeze erzeugt. Daher ist die erwartete Laufzeit konstant.* $\square$

Satz 1. *Die erwartete Gesamtlaufzeit ist $O(n \log\log n)$.*

2 Stufe 2: $O(n \log\log\log n)$

Es sei $n_1 := \lceil \frac{n}{\log_2 n} \rceil$ und $n_2 := \lceil \frac{n}{\log_2 \log_2 n} \rceil$.

(0) Bestimme T_{n_1} durch Einfügen der ersten n_1 Seiten.

(1) Durchlaufe das Polygon P von Trapez zu Trapez in T_{n_1} und bestimme dabei für jede Ecke $p_k \notin T_{n_1}$ das Trapez in T_{n_1}, in dem sie enthalten ist.

for $i := n_1+1, \dots, n_2$:

Es sei $s_i = p_k p_{k+1}$

(2) Falls $p_k \notin T_{i-1}$, bestimme das Trapez in T_{i-1}, in dem die Ecke p_k enthalten ist, mit Hilfe von Q_{i-1}, ausgehend von der Information aus Schritt (1).

(3) Berechne T_i und Q_i durch Einfügen von s_i in T_{i-1} und Q_{i-1}.

(Nun haben wir T_{n_2} bestimmt.)

(1′) Durchlaufe das Polygon P von Trapez zu Trapez in T_{n_2} und bestimme dabei für jede Ecke $p_k \notin T_{n_2}$ das Trapez in T_{n_2}, in dem sie enthalten ist.

for $i := n_2+1, \dots, n$:

Es sei $s_i = p_k p_{k+1}$

(2′) Falls $p_k \notin T_{i-1}$, bestimme das Trapez in T_{i-1}, in dem die Ecke p_k enthalten ist, mit Hilfe von Q_{i-1}, ausgehend von der Information aus Schritt (1′).

(3′) Berechne T_i und Q_i durch Einfügen von s_i in T_{i-1} und Q_{i-1}.

Die obere Schranke n_2 für die erste Schleife ist dadurch bestimmt, dass der Gesamtaufwand für die Schleife höchstens $O(n)$ sein soll.

3 Erweiterung auf unzusammenhängende Graphen

Satz 2. *Wenn die Eingabe eine ebene Unterteilung mit n Kanten in k Zusammenhangskomponenten ist, dann ist die Laufzeit $O(n \log^* n + k \log n)$.*

Voraussetzung ist eine Datenstruktur wie eine DCEL, für die für eine gegebene Kante mit Endecke p_k die beiden Nachbarkanten, die von p_k ausgehen, in konstanter Zeit liefert.