Proseminar Theoretische Informatik WS 21/22 Schriftliche Ausarbeitung zu „An aperiodic set of 11 Wang tiles“ – Abschnitt 2 (S. 3 unten bis S. 6 Mitte)

von Miriam Kammer (Matrikelnr.: 5339216)

Eine Wang-Kachel ist eine quadratische Kachel, deren 4 Seiten verschiedene Farben haben können. Es gibt zwei Mengen von Farben: die Menge H der horizontalen Farben, also der Farben auf der West- und Ostseite der Kacheln, und die Menge V der vertikalen Farben, also der Farben auf der Süd- und Nordseite der Kacheln. Formal wird eine Kachel als 4-Tupel $t=(t_w, t_e, t_s, t_n)$ geschrieben, wobei die 4 Elemente für die Farben der 4 Seiten stehen und die Indizes die Himmelsrichtung der Seite angeben. Eine Wang-Menge $\mathfrak{T}=(H,V,T)$ ist eine Menge von Wang-Kacheln. Dabei ist $T \subseteq H^2 \times V^2$ die Menge der Kacheln.
Das Ziel ist es, mit einer Menge aus Wang-Kacheln eine ganze Ebene X (der ganzen Zahlen) zu kacheln, sodass aneinanderliegende Seiten die gleiche Farbe haben, d.h. die Ostseite der linken Kachel muss immer die gleiche Farbe haben wie die Westseite der rechten Kachel und die Nordseite der unteren Kachel muss die gleiche Farbe haben wie die Südseite der oberen Kachel. Da eine ganze Ebene gekachelt werden soll, muss die Kachelung in beide Richtungen unendlich sein – gibt es keine (unendliche) Kachelung mit der Wang-Menge $\mathfrak{T}$, so wird $\mathfrak{T}$ endlich genannt.
Eine Wang-Menge heißt periodisch, wenn es eine Kachelung der Ebene X gibt, bei der sich ein bestimmtes Muster immer wieder wiederholt, oder formal, wenn es zwei linear unabhängige Verschiebungsvektoren gibt. Aperiodisch heißt eine Wang-Menge nur dann, wenn es keine periodische Kachelung der Ebene gibt, sondern ausschließlich aperiodische.

Im Folgenden wird eine Wang-Menge als endlicher Transduktor betrachtet. Endliche Transduktoren sind eng verwandt mit den endlichen Automaten, jedoch haben Transduktoren ein Eingabe- und Ausgabeband, d.h. beim Lesen jedes Zeichens eines Wortes im Eingabealphabet wird ein Zeichen aus dem Ausgabealphabet geschrieben. In diesem Fall sind Eingabe- und Ausgabealphabet identisch.
Bei endlichen Wörtern haben Transduktoren wie auch endliche Automaten Startzustände und akzeptierende Endzustände, hier ist dies aber nicht der Fall, da die Wörter, die betrachtet werden, beidseitig unendlich sind. Schließlich soll eine in beide Richtungen unendliche Ebene gekachelt werden.
Für Wang-Mengen und die dazugehörigen Transduktoren wird die gleiche Notation ($\mathfrak{T}=(H,V,T)$) verwendet: H ist nun die Zutandsmenge des Transduktors, welche genau der Menge der horizontalen Farben entspricht; V steht für das Eingabe-und Ausgabealphabet des Transduktors (entspricht der Menge der vertikalen Farben) und die Menge T beinhaltet die Übergänge des Transduktors, welche gleichbedeutend mit den Wang-Kacheln sind. Beim Lesen eines Zeichens des Eingabewortes, welches

der Farbe der Südseite einer Kachel entspricht, wird das Zeichen für die Farbe der Nordseite der Kachel auf das Ausgabeband geschrieben, während der Transduktor von dem Zustand, der für die Farbe der Westseite steht, in den Zustand der Farbe der Ostseite übergeht. So kachelt der Transduktor eine beidseitig unendliche Zeile. Eine solche Zeile aus beidseitig unendlichen Wörtern wird im weiteren Verlauf des Artikels mit $w\mathcal{T}w'$ bezeichnet, wobei w für die Farbfolge an den Südenden und w' für die Farbfolge an den Nordenden der Kacheln steht.
Um die gesamte Ebene zu kacheln, wird eine Komposition mehrerer Transduktoren benötigt, genau genommen wird der Transduktor immer wieder mit sich selbst verknüpft. Die Komposition zweier Transduktoren $\mathcal{T}=(H,V,T)$ und $\mathcal{T}'=(H',V,T')$ ist im Artikel wie folgt definiert: $\mathcal{T}\circ\mathcal{T}'=(H\times H',V,T'')$, wobei $T''=\{((w,w'),(e,e'),s,n') : (w,e,s,n)\in T, (w',e',s',n')\in T' \text{ und } n=s'\}$.

Im Folgenden werden drei Operationen definiert, die wir auf Wang-Mengen bzw. auf Transduktoren verwenden werden: Zum einen die Rotation um 90 Grad, sodass sich die Reihenfolge der Elemente in den Tupeln, die die Kacheln bzw. die Übergänge im Transduktor beschreiben, von $T=(w,e,s,n)$ zu $T'=(s,n,e,w)$ ändert. Zum anderen die Vereinfachung $s(\mathcal{T})$, bei der überflüssige Kacheln (d.h. Kacheln, die in einer beidseitig unendlich gekachelten Zeile nicht genutzt werden) entfernt werden. Für den Transduktor bedeutet das, dass die entsprechenden Übergänge entfernt werden müssen. Zudem gibt es noch die Vereinigung zweier Transduktoren, bei der zuerst gleichnamige Zustände umbenannt werden, damit die Zustandsmengen disjunkt sind; anschließend werden die Übergänge der beiden Transduktoren vereinigt.

Im weiteren Verlauf des Artikels wird zwischen äquivalenten Wang-Mengen bzw. Transduktoren hin und her gewechselt, um diese so weit wie möglich zu vereinfachen. Dazu betrachten wir diese als Relationen: Zwei Transduktoren sind genau dann äquivalent, wenn das gleiche Eingabewort (also die Farbfolge an den Südenden der Kacheln) zum gleichen Ausgabewort (zur gleichen Farbfolge an den Nordenden) führt. Nun ist es naheliegend, einen minimalen Transduktor zu konstruieren, indem man äquivalente Zustände zu einem Zustand zusammenfasst, so wie man es bei der Konstruktion eines Äquivalenzklassenautomaten für endliche Automaten macht. Allerdings ist diese Methode, insbesondere bei großen Transduktoren mit sehr vielen Übergängen, ziemlich ineffizient.
Daher wird in diesem Artikel ein anderer Algorithmus verwendet, der auf dem Prinzip der Bisimulation basiert und in linearer Zeit ausgeführt werden kann. Die Bisimulation ist eine Relation zwischen den Zuständen eines Transduktors. Es stehen genau die Zustände in Relation zueinander, die sich gleich verhalten, d.h. der eine Zustand kann den anderen simulieren und umgekehrt, daher der Name „Bisimulation“.