

Zusammenfassung Kari & Culik

Kari präsentiert folgende Kachelmenge T :

$$T_2: \begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & & 0 & & 1 \\ -1 & \boxed{} & -1 & -1 & \boxed{} & 0 & 0 & \boxed{} & -1 & 0 & \boxed{} & 0 \end{array}$$

$$T_{\frac{2}{3}}: \begin{array}{ccccc} & 2 & & 1 & & 1 & & 2 & & & & 2 \\ & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & 2 \\ -\frac{1}{3} & \boxed{} & 0 & 0 & \boxed{} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \boxed{} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \boxed{} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \boxed{} & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 2 & & 2 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ 0 & \boxed{} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \boxed{} & 0 & \frac{2}{3} & \boxed{} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \boxed{} & \frac{1}{3} & 0 & \boxed{} & \frac{2}{3} \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Diese Kachelmenge hat folgende Eigenschaften:

Sei A eine Kachel mit $\begin{array}{c} a \\ b \boxed{} d \\ c \end{array}$. A ist multiplizierbar mit q , wenn gilt: $q \cdot a + b = c + d$

Alle Kacheln aus T_2 sind mit 2 multiplizierbar.

Alle Kacheln aus $T_{\frac{2}{3}}$ sind mit $\frac{2}{3}$ multiplizierbar.

Aufgrund der Farben an den seitlichen Kanten können in einer Reihe ~~immer~~ nur Kacheln aus einer Untermenge T_q vorkommen.

Kari stellt 2 Aussagen und deren Schlussfolgerungen:

Aussage 1: Die Menge T erlaubt keine periodische Kachelung.

Aussage 2: Die Menge T erlaubt unendlich ~~es~~ viele Kachelungen.

Schluss: Die Menge T ist eine aperiodische Kachelmenge.

Beweis Aussage 1:

Wenn T periodisch ist, dann gibt es eine horizontale Periode a' und eine vertikale Periode b' .

Sei $f_i: \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ die Funktion der Kachelung.

Sei n_i die Summe aller ~~Kant~~ Oberkanten von $f(1, i)$ bis $f(a', i)$ in der Reihe i .

Wenn die darunterliegende Reihe als $i+1$ bezeichnet wird, dann gilt $n_{i+1} = n_i \cdot q_i$.

Erklärung: Die Unterkanten der Reihe i entsprechen den Oberkanten der Reihe $i+1$.

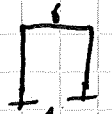
Stellt man die Gleichung $q \cdot a + b = c + d$ zu $q \cdot a = c + d - b$ um und summiert alle Werte a, b, c, d für $f(1, i)$ bis $f(a', i)$ stellt man fest dass $q \cdot a = c$ gilt, da wegen der Periode a' alle die Summe aller linken Seiten b gleich der Summe aller rechten Seiten d ist und $b - d = 0$ gilt.

$$\text{Sprich: } n_{i+1} = \sum_1^{a'} c_i = \sum_1^{a'} q_i \cdot a_i = n_i \cdot q_i$$

Um die vertikale Periode b' zu erfüllen, muss gelten:

$$n_1 = n_{b'+1} = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_{b'} \cdot n_1$$

da keine zwei Kacheln mit der Oberkante 0 nebeneinander sein können, gilt $n_1 \neq 0$.

Folgendes  $q = 1$.

Dies ist nicht möglich, da kein nichtleeres Produkt von $\frac{2}{3}$ en und $\frac{1}{3}$ en 1 werden kann.

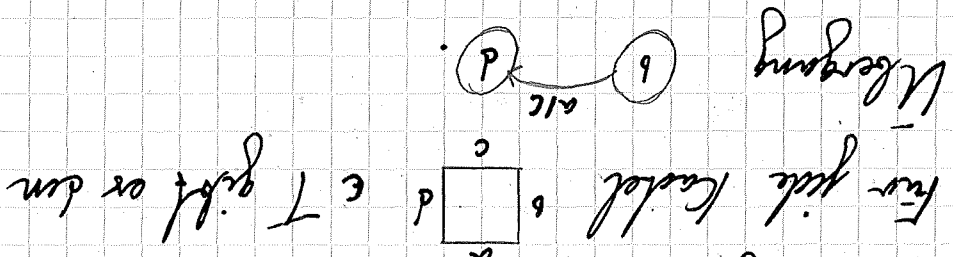
Folglich kann T nicht periodisch sein. $\square$

Brady's Lemma:

Sei α eine beliebige Zahl $\in \mathbb{R}$.
 Dann ist $\lfloor \alpha \rfloor$ die größte natürliche Zahl, nicht größer α .
 Dann ist $\lceil \alpha \rceil$ das Ergebnis von $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$.
 Dann ist $A(\alpha)$ die Brady'sche Reihe von α und
 $A(\alpha)_i = \lfloor i \cdot \alpha \rfloor, i \in \mathbb{Z}$ das i -te Element von
 $A(\alpha)$.
 $B(\alpha)$ ist die ballierte Repräsentation von α
 und $B(\alpha)_i = A(\alpha)_i - A(\alpha)_{i-1}, i \in \mathbb{Z}$ und das i -te
 Element von $B(\alpha)$.

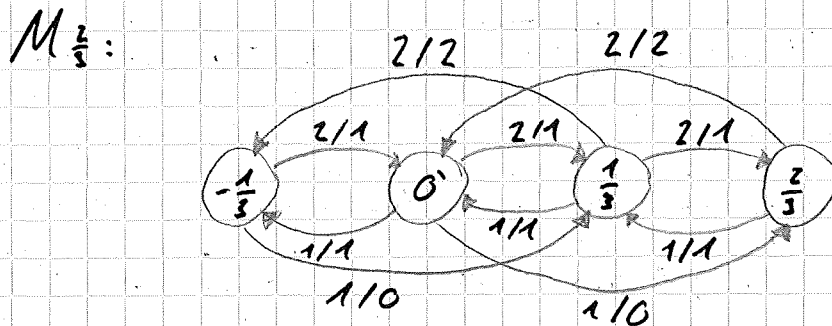
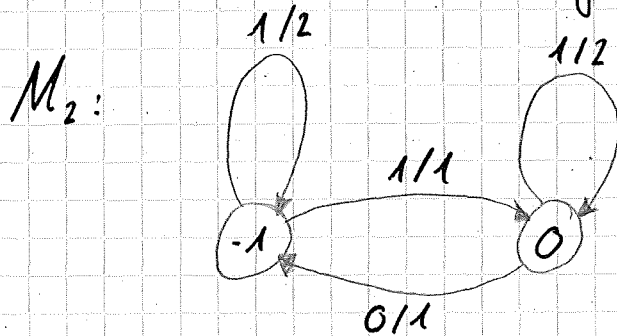
Mealy-Automaten:

Ein Mealy-Automat ist ein gerichteter Graph, wo
 die Knoten Zustände sind und die Kanten
 Zustandsübergänge. Die Zustandsübergänge sind
 mit der Eingabe a und der Ausgabe b in Form
 a/b markiert.
 Ein Mealy-Automat kann zur Darstellung von
 Nachschreibern genutzt werden:



Für jede Kante b $\square$ d $\in T$ gibt es den
 Nachschreiber a/c .

Automat $\frac{M}{T}$ für die Kachelmenge von Kari:



Man kann konstruieren einen Automaten M_q für eine beliebige Zahl $q \in \mathbb{Q}$, der Form $q = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Die Zustände von M_q stellen alle möglichen Werte von $q \cdot \lfloor r \rfloor$ bis $\lfloor q \cdot r \rfloor$ mit $r \in \mathbb{R}$ da.

Es gilt: $q \cdot \lfloor r \rfloor - 1 \leq q \cdot r - 1 < \lfloor q \cdot r \rfloor \leq q \cdot r < q \cdot (\lfloor r \rfloor + 1)$,
folglich: $-q < q \cdot \lfloor r \rfloor - \lfloor q \cdot r \rfloor < 1$.

Alle möglichen Werte von $q \cdot \lfloor r \rfloor$ bis $\lfloor q \cdot r \rfloor$ haben sind Vielfache von $\frac{1}{m}$ und liegen in $S = \{ -\frac{n-1}{m}, -\frac{n-2}{m}, \dots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m} \}$. Die Menge S hat immer $m+n+1$ Elemente. Sind die Menge an Zuständen von M_q .

Es gibt den Übergang von $b \in S$ (mit Eingabe a und Ausgabe c) in den Zustand $d = b + qa - c$, wenn es den Zustand $d \in S$ gibt.

Bei einer Eingabe $B(\alpha)$ kommt die Ausgabe $B(q\alpha)$.
Wenn $B(\alpha)$ eine Reihe von Eingabebereichen bildet und
 $B(q\alpha)$ eine Reihe von Ausgabebereichen, dann sind
 $B(\alpha)$ und $B(q\alpha)$ in Beziehung $\rho(M_q)$ miteinander.

M_2 hat die Eingabebereichen $\{0, 1\}$ und die
Ausgabebereichen $\{1, 2\}$, was bedeutet dass alle $B(\alpha)$
und $B(2\alpha)$ welche $0 \leq \alpha \leq 1$ und $1 \leq 2\alpha \leq 2$
erfüllen in $\rho(M_2)$ enthalten sind (alle $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$).

$M_{\frac{2}{3}}$ hat die Eingabebereichen $\{1, 2\}$ und Ausgabebereichen
 $\{0, 1, 2\}$, weshalb $B(\alpha), B(\frac{2}{3}\alpha) \in \rho(M_{\frac{2}{3}})$ für
alle $\alpha \in [1, 2]$ gilt.

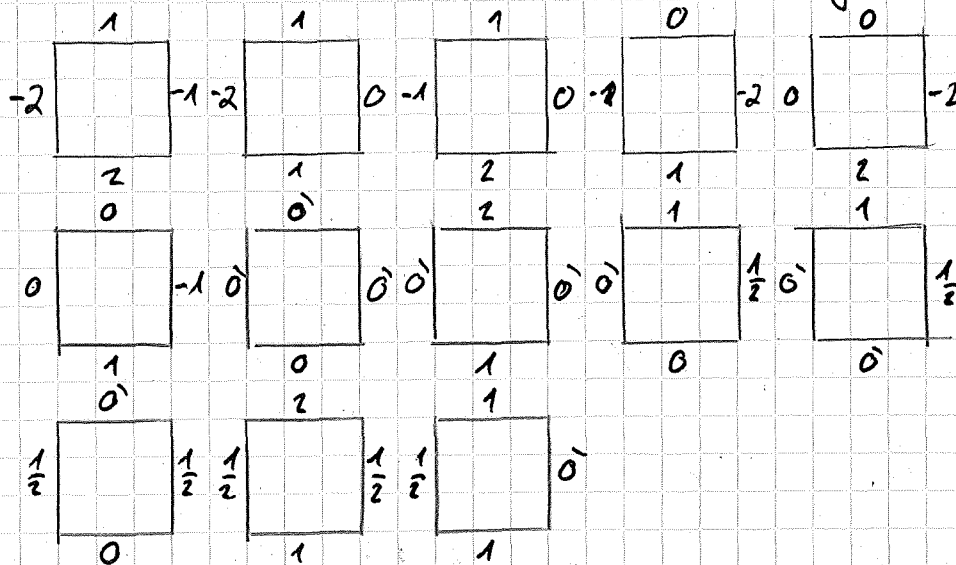
Beweis Aussage 2:

Wie bereits festgestellt gibt M für die Eingabe $B(\alpha)$
mit $\alpha \in [\frac{1}{2}, 2]$ entweder $B(2\alpha)$ für $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ oder
 $B(\frac{2}{3}\alpha)$ für $\alpha \in [1, 2]$. M kann die letzte
Ausgabe als nächste Eingabe nehmen und dies
beliebig oft wiederholen.

Wenn $\alpha \in [\frac{1}{3}, 2]$, gibt es Eingaben $B(\frac{1}{2}\alpha)$ und
 $B(\frac{3}{2}\alpha)$ in Beziehung $\rho(M)$ zur Ausgabe $B(\alpha)$,
was zeigt dass M auch rückwärts iteriert werden
kann und somit beidseitig unendlich ist,
folglich die Ebene Kachelt. $\square$

Dies ist der Inhalt des Papers von Kari.

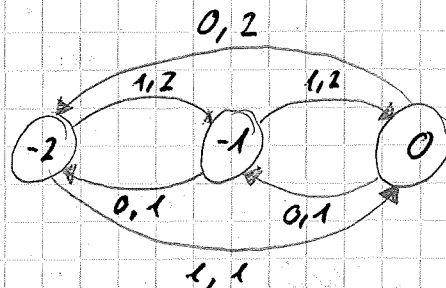
Culik benutzt die von Kari angewandten Beweissverfahren um folgende Kachelmenge T zu entwickeln und als aperiodische Kachelung aufzuweisen:



Er tut dies in dem er die von Kari vorgestellten Mealy-Automaten und balancierten Reihen nutzt um einen Automaten M (siehe unten) zu entwerfen der für $q = 3, \frac{1}{2}$ die obere Kachelmenge konstruiert.

Er reduziert die Anzahl an Farben, in dem er feststellt dass dadurch das Kacheln nicht rotiert werden dürfen, man die selben Farben für vertikal wie horizontale Kanten verwenden kann.

$M: M_s:$



$M_{\frac{1}{2}}:$

