

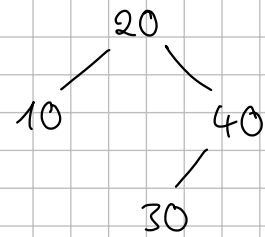
Optimale Suchbäume

geg.: n Schlüssel: $x_1=10, x_2=20, x_3=30, x_4=40$

Kauffrequenzen: $p_1=5, p_2=2, p_3=3, p_4=1$

Tiefe + 1: 2 1 3 2

Kosten: $5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 23$



zusätzlich
Kaufhäufigkeiten für
erfolgreiche Suchen

$x < 10, 10 < x < 20, 20 < x < 30, 30 < x < 40, x > 40$

$q_0=22, q_1=11, q_2=0, q_3=3, q_4=4$

Tiefe 2, 2, 3, 3, 2

Kosten $22 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 83$

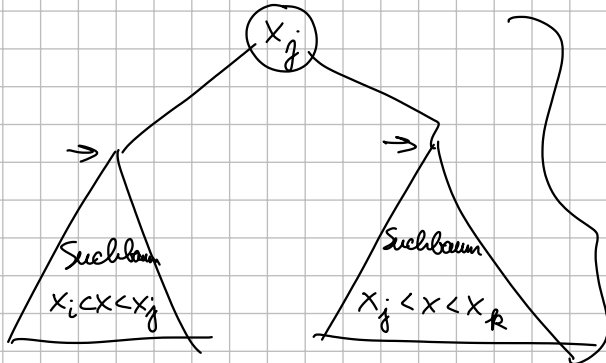
Gesamtkosten = $23 + 83 = 106$ das wollen wir minimieren

① Teilprobleme T_{ij} : optimaler Suchbaum für Suchschlüssel $x \in (x_i, x_j)$ also $x_i < x < x_j$

S_{ij} : Suchzeit für T_{ij}

$-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$

$0 \leq i < j \leq n+1$



Suchzeit:

Suchzeit _{i,j} + Suchzeit _{j,k}
 $+ \sum_{l=i}^j q_l + \sum_{l=j+1}^{k-1} p_l$

1 Möglichkeit für T_{ij}

$$② S_{ij} = \min_{i < w < j} \{S_{iw} + S_{wj}\} + \sum_{l=i}^j q_l + \sum_{l=w+1}^{j-1} p_l$$

, Lösung ist $S_{0,n+1}$

$$②b S_{i,i+1} = 0 \text{ (Randbedingungen)}$$

for $i = 0 \dots n$

Bottom-up

$$S_{i,i+1} = 0$$

for $l = 2 \dots n+1$

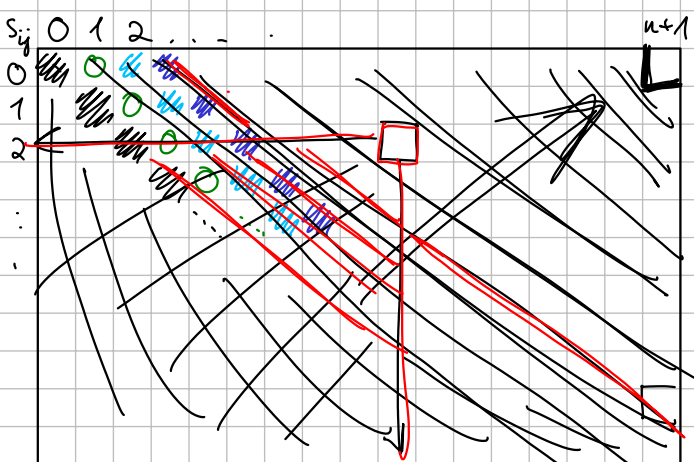
for $i = 0 \dots n+1-l$

$$j = i + l$$

$$S_{ij} = \min_{i < w < j} \{S_{iw} + S_{wj}\} + \sum_{l=i}^{j-1} q_l + \sum_{l=w+1}^{j-1} p_l$$

return $S_{0,n+1}$

insgesamt $O(n^3)$



OPT(i, j):

if $j - i \leq 1$

return 0

if $S[i][j]$ bereits berechnet

$$S[i][j] = \min_{i < w < j} \{ \text{OPT}(i, w) + \text{OPT}(w, j) \} + \sum_{l=i}^{j-1} q_l + \sum_{l=i+1}^{j-1} p_l$$

return $S[i][j]$

Top-Down (memoization)

3

Dynamische Programmierung

Systematisches Lösen von Teilproblemen mit Rückgriff auf kleinere Teilprobleme
ein allgemeines Algorithmenentwurfsprinzip

① Definition der Teilprobleme

② Rekursion

②.b Randbedingungen

③ Implementierung • Überlegung der Reihenfolge bei bottom-up (kleinere Probleme zu größeren)
• Rekursiv mit memoization
• auf keinen Fall naïv rekursiv implementieren!!

Von $O(n^3)$ zu $O(n^2)$ (Übung)

+ Preprocessing: $Q_0 = 0$

$O(n)$ {

$$Q_1 = q_0$$

$$Q_2 = q_0 + p_1$$

$$Q_3 = q_0 + p_1 + q_1$$

$$Q_4 = q_0 + p_1 + q_1 + p_2$$

...

$$Q_{2i} = \sum_{l=0}^{i-1} q_l + \sum_{l=1}^i p_l$$

$$Q_{2i+1} = \sum_{l=0}^i q_l + \sum_{l=1}^i p_l$$

$$\Rightarrow \sum_{l=i}^{j-1} q_l + \sum_{l=i+1}^{j-1} p_l =$$

$$= \sum_{l=0}^{j-1} q_l - \sum_{l=0}^{i-1} q_l + \sum_{l=1}^{j-1} p_l - \sum_{l=1}^i p_l$$

$\swarrow \quad \searrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow$
 $Q_{2(j-1)+1} \quad \quad \quad Q_{2i}$

Zurückverfolgung der Wurzeln durch z.B. Speicherung (analog zu SSSP-Baum - Vorgängerspeicher)