2. Treffen, Proseminar Theoretische Informatik
Universalität von 2-3-Turingmaschinen

Dozent: Prof. Günter Rote, Berichterstatter: Dorian Pfefferkorn

Hinweis: wenn nicht explizit gekennzeichnet, beziehen sich alle Aussagen auf Quelle [1]

1 Einleitung

Gezeigt wird die Universalität einer Turingmaschine (TM) mit einem Alphabet der Größe 3 (0,1,2) und 2 Zuständen (A und B), sowie 6 gegebene Zustandsübergänge (auch System 0 genannt), durch

- TM kann jedes zyklisches 2farbiges Tag-System emulieren
- Universalität von zyklischen Tag-Systemen ist bekannt [2]

Schritte des Beweises:

1. Emulation für beliebige, aber begrenzte Anzahl von Schritten
2. Emulation für unbegrenzte Anzahl von Schritten

Smith schlägt 4 verschiedene TM vor, und zeigt schrittweise ihre Äquivalenz:
System 0 $\Leftrightarrow$ System 1 $\Leftrightarrow$ System 2 $\Leftrightarrow$ System 3

Nach den Äquivalenz-Beweisen werden mehrere Lemmas zum Verhalten von System 3 aufgestellt.
Alle TM haben als Vorbedingung:

- initiales Wort fester Länge steht auf dem Band
- linkeste Zelle ist 0
- TM startet in Zustand A
- nachdem TM auf initialem Wort emuliert wurde:
  - aktive Zelle ist die erste Zelle rechts neben dem Wort
  - wenn diese Zelle = 0 $\rightarrow$ TM geht in Zustand A

(*Anmerkung aus der Diskussion:* In der Arbeit wird für System 2 beschrieben, dass wenn diese Zelle = 0 $\rightarrow$ TM geht in Zustand B. Dies wird als Fehler vermutet und müsste auch Zustand A sein.)

2 System 0

Merkmale:

- 3 Zeichen, 2 Zustände, 6 Zustandsübergänge
- Zustandsübergänge nur abhängig von der aktiven Zelle

3 System 1

Merkmale:

- 3 Zeichen, 2 Zustände, 8 Zustandsübergänge
- in 3 Fällen sind Zustandsübergänge abhängig von der aktiven Zelle UND der Zelle rechts davon

4 Äquivalenz System 0 und System 1

- nur die drei Übergänge von Sys. 1, die von je 2 Zeichen abhängen, unterscheiden sich von Sys. 0
- diese Übergänge werden mit Sys. 0 emuliert, welches die Zeichen einzeln liest
- am Ende bei allen Übergängen gleiches Ergebnis
- in zwei Fällen benötigt Sys. 0 zwei Schritte mehr als Sys. 1 ⇒ Overhead von 2

Beispiel (Übergänge der Arbeit jeweils von links durchnummeriert):

System 1	System 0
- 2 1	- 2 1
B	B
- 1 2 (Ü.7)	- 0 1 (Ü.6)
B	A
	- 0 2 (Ü.3)
	A
	- 1 2 (Ü.1)
	B

5 System 2

Merkmale:

- 3 Zeichen, 3 Zustände (!), 13 Zustandsübergänge
- in 6 Fällen sind Zustandsübergänge abhängig von der aktiven Zelle UND der Zelle rechts davon

6 Äquivalenz System 1 und System 2

- nur Übergänge von Sys. 2, in denen Zustand C vorkommt, unterscheiden sich von Sys. 1
- Übersetzung von Sys. 3 in Sys. 2 nach folgenden Regeln:
  - Zustand C ist Endzustand:
    - 1 und 2 werden auf dem Band vertauscht (nur aktives Element NACH dem Übergang)
    - Zustand C wird ersetzt durch Zustand B
  - Zustand C ist Startzustand:
    - 1 und 2 werden vertauscht
    - Zustand C wird ersetzt durch Zustand B
    - danach gleiche Regeln wie für Sys. 1
- kein Overhead

Beispiel (Übergänge der Arbeit jeweils von links durchnummeriert):

Für Startzustand C		Für Endzustand C	
System 2	System 1	System 2	System 1
- 2 -	- 1 -	- 2 2	- 2 2
C	B	B	B
- 2 - (Ü.13)	- 2 - (Ü.4)	- 1 2 (Ü.12)	- 1 1 (Ü.8)
B	B	C	B

7 System 3

Merkmale:

- 3 Zeichen, 3 Zustände (!), 13 Zustandsübergänge
- in 6 Fällen sind Zustandsübergänge abhängig von der aktiven Zelle UND der Zelle rechts davon

8 Äquivalenz System 2 und System 3

- umrechnen, indem auf dem Band links vom aktiven Element 1en und 2en vertauscht werden
- wenn System in Zustand A, auch beim aktiven Element selbst vertauschen
- gilt in beide Richtungen

Beispiel 1 (Zustand B)	**Beispiel 2** (Zustand A) (veränderte Zahlen **fett** markiert)
System 2	System 2
0 2 1 0 2 2 1 0 1 1 0 2 1	**0 2 1 0 2 2 1 0 1** 1 0 2 1
B	A
System 3	System 3
0 1 2 0 1 1 2 0 1 1 0 2 1	**0 1 1 0 1 1 2 0 2** 1 0 2 1
B	A

9 Lemma 0

- trifft Aussagen über das Verhalten von System 3
- gilt für alle zusammenhängende Mengen an 1en und 2en auf dem Band (z. B. 02010**112122112**01211)
- Voraussetzungen:
  - System startet in Zustand A
  - während Ausführung geht System min. 1x in Zustand B oder C

10 Sublemma 0.1

- linkestes Element der Menge ist das Erste, in dem TM den Zustand B oder C annimmt

<u>Beweisskizze:</u>

Fall 1: Schreib-Lese-Kopf fährt von links in die Menge

- muss in jedem Fall erfolgen wegen Bedingung, dass min. 1x Zustand B oder C in der Menge aktiv
- alle Zustandsübergange mit Bewegung nach rechts gehen in Zustand B oder C
- Ausnahme: Ü.10, kann nicht eintreten, weil erstes Element der Menge dafür 0 sein müsste

Fall 2: Schreib-Lese-Kopf befindet sich bereits in der Menge

- ist anfangs in Zustand A (wegen der Anfangsbedingung)
- kann sich bei 1en und 2en in Zustand A nur nach links bewegen und in Zustand A bleiben
- diese Übergänge (Ü.4 und Ü.9) verändern den Bandinhalt nicht
- fährt wieder nach rechts bei erster Null
- dann wie Fall 1

Fall 3: Schreib-Lese-Kopf fährt von rechts in die Menge

- anfangs in Zustand A, weil alle Übergänge mit Bewegung nach links gehen nach A
- dann wie Fall 2

Literatur

[1] Alex Smith. Universality of wolfram's 2, 3 turing machine. *Complex Systems*, 29(1):pp. 1–44, 2020.

[2] Turlough Neary and Damien Woods. P-completeness of cellular automaton rule 110. *in M. Bugliesi, B. Preneel, V. Sassone, and I. Wegener, editors, Automata, Languages and Programming*, 4051 of Lecture Notes in Computer Science:pp. 132–143, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer.