

Proseminar Theoretische Informatik, SoSe 24

Veranstalter: Günter Rote

Treffen 03

Berichterstatter: Frederik Köllmer

Lemma 0

Vorraussetzungen:

1. Gegeben ist eine Menge von nebeneinander stehenden Elementen
2. Die Farbe der Element der Menge sind 1 oder 2.
3. Wir starten im Zustand A.
4. Mindestens ein Element der Menge ist während der Ausführung im Zustand B oder C aktiv.

Lemma 0.1:

Das linkeste Element der Menge wird als erstes zu B oder C.

Lemma 0.2:

Wenn das linkeste Element im Zustand B oder C aktiv wird, werden alle Elemente der Menge nacheinander zu B oder C.

1. Wenn das Element vor dem Schritt die Farbe 1 oder 2 hat und im Zustand B oder C ist, geht sie nach rechts.
2. Wenn das Element rechts des aktiven Elements 0 ist geht sie einen Schritt nach rechts und wechselt zum Zustand A, da kein Element in der Menge die Farbe 0 hat ist das Element außerhalb der Menge.

Lemma 0.3:

Die Farbe des aktiven Elements im Zustand B wechselt zu 0 oder bleibt gleich.

1. Wenn die Farbe des Elements 2 ist und die Farbe des Elements rechts davon 0 ist. Wird die Farbe des Elements zu 0.
2. In den anderen Fällen bleibt die Farbe gleich.

Das Element wird erst wieder aktiv, wenn der aktive Zustand zu A ist, da die Turing Maschine nur nach links geht, wenn der Zustand nachher A ist.

Lemma 0.4:

Die Farbe des aktiven Elements der Menge im Zustand C wechselt seine Farbe.

1. Wenn die Farbe des Elements 1 ist und die Farbe des Elements rechts davon 0 ist. Wird die Farbe des Elements zu 0.
2. Wenn die Farbe des Elements 1 ist und die Farbe des Elements rechts davon nicht 0 ist. Wird die Farbe des Elements zu 2.
3. Wenn die Farbe des Elements 2 ist, dann wechselt die Farbe zu 1.

Das Element wird erst wieder aktiv, wenn der aktive Zustand zu A ist, da die Turing Maschine nur nach links geht, wenn der Zustand nachher A ist.

Lemma 0.5:

Der Zustand des aktiven Elements mit Farbe 1 wechselt zu A oder bleibt gleich.

1. Wenn der aktive Zustand C ist und die Farbe des Elements rechts des aktiven Elements 0 ist. Wird der Zustand des nächsten Element A sein.
2. In den anderen Fällen wird der aktive Zustand gleich bleiben.

Lemma 0.6:

Wenn das aktive Element aus der Menge die Farbe 2 hat und im Zustand B oder C ist ändert sich der aktive Zustand.

1. Wenn der aktive Zustand B ist und die Farbe des Elements rechts des aktiven Elements 0 ist. Wird der Zustand des nächsten Elements A sein.
2. Wenn der aktive Zustand B ist und die Farbe des Elements rechts des aktiven Elements nicht 0 ist. Wird der Zustand des nächsten Elements C sein.
3. Wenn der aktive Zustand C ist. Wird der aktive Zustand des nächsten Elements zu B wechselt.

Lemma 0.7:

Wenn es eine gerade Anzahl an 2en gibt, ist der Zustand des Elements rechts von der Menge A oder der gleiche wie der Zustand des linkesten Elements.

1. Wenn die Farbe des Elements rechts der Menge 0 ist und der Zustand des linkesten Element der Menge C war. Dann wird der Zustand des Elements rechts der Menge zu A.
2. Wenn der aktive Zustand des linkesten Elements B war. Dann wird der Zustand des Elements rechts der Menge zu B.
3. Wenn der aktive Zustand des linkesten Elements C war und die Farbe des Elements rechts der Menge nicht 0 ist. Dann wird der Zustand des nächsten Elements zu C.

Lemma 0.8:

Wenn es eine ungerade Anzahl an 2en gibt, ist der Zustand ein anderer als der Zustand des linkesten Elements der Menge.

1. Wenn die Farbe des Elements rechts der Menge 0 ist und der Zustand des linkesten Element der Menge B war. Dann wird der Zustand des Elements rechts der Menge zu A.
2. Wenn der aktive Zustand des linkesten Elements B war und die Farbe des Elements rechts der Menge nicht 0 ist. Dann wird der Zustand des Elements rechts der Menge C.
3. Wenn der aktive Zustand des linkesten Elements C war. Dann wird der Zustand des nächsten Elements zu B.

Lemma 0.9:

Wenn die Farbe des rechtesten Elements 0 wird, wird es, wenn es wieder aktiv wird zu einer 2.

1. Die Farbe des rechtesten Elements wird zu 0, wenn
 - a) die Farbe des rechtesten Elements 1 ist und es im Zustand C aktiv ist
 - b) oder die Farbe des rechtesten Elements 2 ist und es im Zustand B aktiv ist
 in beiden Fällen geht die Turing Maschine ein Element nach rechts. Also wird das Element erst wieder aktiv, wenn sie wieder nach links geht.
2. Wenn das Element wieder aktiv ist, ist der aktive Zustand A. Da wenn die Turing Maschine nach links geht, das nächste Element im Zustand A aktiv ist.
3. Wenn der aktive Zustand A ist und die Farbe des Elements 0 ist wechselt die Farbe zu 2.

Lemma 1

Vorraussetzungen:

1. Gegeben ist eine Menge von nebeneinander stehenden Elementen
2. Die Farbe der Element der Menge sind 1 oder 2.
3. Die Länge der Menge ist 2^w
4. Wir starten im Zustand A.

Definitionen:

- n-te scan: n-te mal, dass das linke Element der Menge im Zustand B oder C aktiv ist.
- parity: Die Summe der Anzahl der 0en und 2en modulo 2.
- $p(n)$: Die parity beim n-ten scan
- Die parity heiSSt even, wenn sie 0 und odd wenn sie 1 ist.
- $s(n)$: Die state parity beim n-ten scan.
 - a) 0 wenn der Zustand beim n-ten scan B ist
 - b) oder 1 wenn der Zustand beim n-ten scan C ist.

Für alle $n > 2^w$ gilt:

Lemma 1.1: $p(n) = p(n - 2^w) + s(n - 2^w) \pmod{2}$

Lemma 1.2: Wenn $p(n) + s(n) = 0 \pmod{2}$ dann wird das nächste mal, wenn das Element rechts der Menge aktiv wird:

- aktiv im Zustand B.
- sonst:
 - a) wenn seine Farbe 0 ist, wird es aktiv im Zustand A
 - b) sonst, wird das Elem aktiv im Zustand C.

Lemma 1.3: Bei jedem scan sind alle Elemente der Menge 1 oder 2.

Beweis Lemma 1

Mit Induktion über w .

I.A $w = 0$

Lemma 1.1:

1. Fall 1: Zustand ist B also $s(n-1)=0$ und $p(n-1)=0/1$: Dann ändert sich nach Lemma 0.3 die Parität nicht und $p(n)=0/1$.
2. Fall 2: Zustand ist C also $s(n-1)=1$ und $p(n-1)=0/1$: Dann ändert sich nach Lemma 0.4 die Parität und $p(n)=1/0$.

Wenn die Turing Machine dann von rechts der Menge wieder nach links geht ändert sich die Parität nicht.

Lemma 1.2:

Hier muss man sich alle möglichen Fälle ansehen.

10- B	10- C	11- B	11- C	12- B	12- C	20- B	20- C	21- B	21- C	22- B	22- C
-10 B	-00 A	-11 B	-21 C	-12 B	-22 C	-00 A	-10 B	-21 C	-11 B	-22 C	-12 B

Lemma 1.3:

Folgt aus Lemma 0.9.

Quelle: Smith, Alex, Universality of Wolfram's 2, 3 Turing Machine, 2007, <https://www.wolframscience.com/prizes/tm23/TM23Proof.pdf>