

Schriftliche Ausarbeitung vom 07.06.2024

Why the initial Condition works

Wir wollen zeigen, dass Conjecture 4 Conjecture 3 impliziert und somit auch Conjecture bzw. System 0. Um dies zu erreichen wird eine Ausgangsbedingung gewählt, welche auf ihre Korrektheit analysiert wird.

Um die Korrektheit der „initial condition“ zu beweisen, muss jeder Schritt aus System 4 zum gleichen Ergebnis führen wie System 3. Dafür werden die fünf Regeln für System 4 betrachtet:

1. Wenn System 3 in Zustand A ist und eine 1 oder 2 aktiv ist (= Menge aktiv in A), dabei gibt es zwei Fälle falls links eine andere Menge oder ein Stern ist

a.

- Das linke Ende wird repräsentiert durch Blöcke von „0222...222“. Nach den Regeln für System 3 wird die 0 zu einer 2 und danach folgen abwechselnd 2en und 1en, da sich das System in Zustand B und C abwechselt. Der String geht über in die Form „221212...10“. Im Folgenden sind die relevanten Regeln zu sehen:

System 3												
-0-	-0-	-0-	-2-	-1-	-10	-11	-12	-1-	-20	-21	-22	-2-
A	B	C	A	B	C	C	C	A	B	B	B	C
-2-	-2-	-2-	-2-	-1-	-00	-2-	-2-	-1-	-00	-2-	-2-	-1-
B	A	A	A	B	A	C	C	A	A	C	C	B

- Eine 0 am Ende markiert das Ende des Blocks, weshalb die letzte 2 in B zu einer 0 in A wird und dadurch den nächsten wiederholenden Block einleitet. In der letzten Wiederholung ist das letzte Element eine 1 in B statt 2 und bleibt demnach in B, rechtes Element wird aktiv. Als Beispiel:

0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20
A	B	C	B	C	B	C	B	C	B	BA
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	00

b.

- Der zweite Fall bedeutet, dass das linke Ende bereits in der Form „221212...10“ ist. Zu zeigen ist, dass der Zyklus aus „1212...“ in die Form „1221“ konvertiert. Wie auch für den ersten Fall, befindet sich das System in Zustand A. Dabei wird ganz rechts im Block in Zustand A gestartet und nach den Regeln von System 3 solange nach links gelaufen, ohne etwas am Band zu ändern, bis das System auf eine 0 trifft. Es wird eine 2 geschrieben und das System geht nach rechts in Zustand B.

System 3												
-0-	-0-	-0-	-2-	-1-	-10	-11	-12	-1-	-20	-21	-22	-2-
A	B	C	A	B	C	C	C	A	B	B	B	C
-2-	-2-	-2-	-2-	-1-	-00	-2-	-2-	-1-	-00	-2-	-2-	-1-
B	A	A	A	B	A	C	C	A	A	C	C	B

▪

0	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2
A	B	C	B	B	C	C	B	B	C	C
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1...

- Solange sich also 1en und 2en abwechseln, entsteht ein Zyklus aus „1221“ (es gilt mindestens $w = 2$). Diese Konvertierung führt dazu, dass die Anzahl der 0en dekrementiert, da man sich quasi eine 0 bei der Konvertierung wegnimmt, wodurch

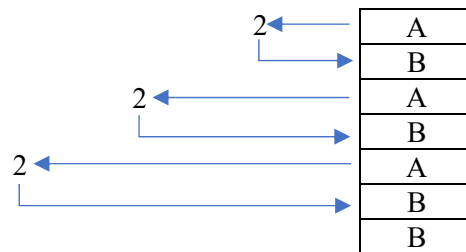
die gerade Parität erhalten bleibt. Alle Zellen, welche aktiv waren, haben eine gerade Parität für die nächsten x Scans, falls sie immer in Zustand B sind. Insgesamt lässt sich der Vorgang und die Gegenüberstellung von System 3 und 4 durch folgende beispielhafte Darstellung visualisieren:

System 4:

...	*	{ }	*	{ }	{1, 4}	*	{ }	{ }	...
					A				

System 3:

02...2	02...2	02...2	02...2	02...2					
--------	--------	--------	--------	--------	--	--	--	--	--



221...	221...	221...	221...	221...					
--------	--------	--------	--------	--------	--	--	--	--	--

Die Visualisierung zeigt die Umwandlung von System 4 in System 3 durch die String-Blöcke der Form „0221212...2“ in Zustand A. Dabei wird eben die 0 jeweils am Anfang der Blöcke entnommen und, solange sich 1en und 2en abwechseln im Block, ein Zyklus der Form „12212 entsteht, beginnend mit „221...“, wodurch die vorherige 0 ersetzt wird.

Im Folgenden betrachten wir Regel 2:

2. Ein aktiver Stern in Zustand A ist eine 0, welche die ganz rechte 2 einer Menge ersetzt
 - Der Stern wird gelöscht, das Element rechts davon wird aktiv und wechselt in Zustand B.
 - Nach der „initial condition“ wird ein Stern jedoch zunächst zu einer 0 übersetzt und ersetzt die ganz rechte 2 der linken Menge (falls aktives Element rechts oder Stern selbst in A oder C) oder die ganz linke 2 der rechten Menge (falls aktives Element links oder Stern selbst in B oder C).
 - Da der erste Fall zutrifft, also aktiver Stern (= 0) in Zustand A, wird die ganz rechte 2 der linken Menge ersetzt. Regel 2 sagt nun aus, dass die ersetzte 2 wieder zur 2 wird, da eine 0 (der Stern) in Zustand A nach den Regeln von System 3 zu einer 2 wird und das System nach rechts zu Zustand B wechselt.

{...}	*	{...}
	A	
2...2	0	2...2
2...	2	2...2
2...	0	2...2
	A	
	2	B
2...	2	0...2

- Die obige Darstellung zeigt, wie zunächst der Stern in Zustand A zu einer 0 übersetzt wird. Die Mengen links und rechts entsprechen in System 3 den bereits bekannten Blöcken. Der Stern wird entfernt, indem die ganz rechte 2 der linken Menge mit der 0

ersetzt wird, wodurch sich die linke Menge quasi um eine Stelle nach rechts verschiebt und die 0 „an der gleichen Stelle“ bleibt graphisch gesehen. Die beiden Mengen sind somit nun adjazent, ohne ein Element dazwischen. Nach einer Regel für System 3 wird nun die 0, welche immer noch in Zustand A ist, zu einer 2 und das System wechselt nach rechts in Zustand B. Für die rechte Menge erfolgt nun der gleiche Prozess, wie in der letzten Zeile der obigen Darstellung angedeutet.

- Jeder Schritt in System 4 ist ein Schritt in System 3.

3. Folgendes passiert nach einem Scan:

- a. Eine 0 innerhalb einer Menge aus System 4 entspricht ungerader Parität in System 3. Das System wechselt in den jeweils anderen Zustand zwischen $\{B, C\}$. Also wenn das System in B war, wechselt es in A oder C, wenn es in C war, wechselt es in A oder B (bzw. $B \Rightarrow \{A, C\}$ oder $C \Rightarrow \{A, B\}$). Dies folgt aus den Regeln von Lemma 0.7 und 0.8.
- b. Außerdem reduziert sich die Zeit zu den nachfolgenden Scans, was äquivalent zum Dekrement der Menge aus Regel 3 für System 4 ist.
- c. Nun wird abgedeckt, ob eine 0 rechts von der Menge vorhanden ist oder nicht. Falls keine 0 vorhanden ist, deutet dies auf eine adjazente Menge zur aktuellen Menge hin (kein Stern vorhanden \Rightarrow keine 0) und die Menge wird korrekterweise aktiv.
- d. Falls doch eine 0 rechts der Menge existiert, müssen zwei Fälle betrachtet werden:

1.

- Alle 1en und 2en werden umgekehrt bzw. von jeweils anderen 1en und 2en ersetzt. Eine 1 wird zu einer 2 und umgekehrt. Dadurch hat das System eine 0 rechts von der aktiven Menge und das System ist in Zustand B.
- Dieser Vorgang gleicht der Definition für einen Stern aktiv in Zustand B.

2.

- Ohne die rechte 0 würde ein Scan in Zustand C enden. Dieser endet jedoch stattdessen in Zustand A, wobei das Element ganz rechts der Menge von der 0 ersetzt wird. Die rechte 0 der beiden 0en wird aktiv.
- Dies gleicht der Definition für einen aktiven Stern in Zustand C.
- Lemmata 0.3 und 0.4 zeigen, dass nur jenes Element eine 0 werden kann, welches zu einer 2 wechseln würde. Für Lemma 0.3 gilt: nur wenn ein Element aktiv in B ist, wechselt es von einer 2 zu einer 0 bis das System Zustand A erreicht. Bedingung dafür ist, dass das Element ganz rechts ist und neben der 0 noch eine adjazente 0 existiert, was in diesem Fall vorliegt. Für Lemma 0.4 gilt ähnliches: wenn ein Element aktiv in C ist, wechselt es von einer 2 zu 1 oder von 1 zu 2 oder 0 bis Zustand A erreicht ist. Ebenfalls gilt hier die Bedingung, dass nur das ganz rechte Element gemeint ist und neben der 0 noch eine 0 sein muss.
- Daraus folgt, dass es eine 2 sein muss, welche von einer 0 ersetzt wird.